Teknillinen korkeakoulu Apiola/Häme
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2006
`http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/`

Laskuharjoitus 1 (viikko 45 , 6 – 10.11.2006)

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/`
Octave `http://www.gnu.org/software/octave/` , voit ladata omalle koneellesi (kohta "downloads")
Lyhyt Matlab-opas:
`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/`

Harjoitussysteemi

Alkuviikon (AV) harjoitus on neuvonta- (tutorointi-) harjoitus. (Termin demoharjoitus käyttö on **ankarasti kielletty!!**)
Tässä harjoituksessa merkitään läsnäolorasti nimen perään ja kahden ensimmäisen tehtävän kohdalle, mikäli on valmis esittämään ao. tehtävän (taululla tai suullisesti)
Loput tehtävät tehdään yhdessä assistentin opastuksella. Jos aikaa jää, voidaan aloitella LV-tehtävien tekoa.
Loppuviikon (LV) harjoitus on perinteinen kotilaskuharjoitus.
Max-pisteet viikon harjoituksista ovat $1 + 2 + 6 = 9$.

Huom! Joissakin tehtävissä voitaisiin johonkin johtopäätökseen päästä determinantin avulla. Näissä harjoituksissa ei kelpuuteta tällaisia ratkaisuja, vaan harjoitellaan johtopäätösten tekoa rivioperaatioiden seurauksena.

Alkuviikko

Tehtävät 1 ja 2 ovat kotitehtäviä, jotka käydään taululla läpi harjoituksen alussa.

1. Annettuna on $3 \times 3-$systeemin liitännäismatriisi $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Muodosta rivioperaatioilla porrasmuoto "ref" — "row echelon form". Merkitse tukisarakkeet ja tukialkioiden paikat. Jatka sitten rivioperaatioita alhaalta ylöspäin päästäksesi redusoituun porrasmuotoon "rref".

2. Ratkaise yhtälösysteemi $\begin{cases} x_1 - 3\,x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 \\ x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$
   Muokkaa Gaussin rivioperaatioilla systeemi yläkolmiomuotoon, rengasta tukialkiot ja ratkaise. Voit operoida suoraan yhtälömuodolla tai liitännäismatriisilla ("augmented matrix"). Voit suorittaa takaisinsijoituksen suoraan ref-muodosta tai edetä rref-muotoon. Opettavaisinta on tehdä molemmat.
   Tarkistus: 1) Sijoita ratkaisusi yhtälöön tai 2) Käytä sopivaa matriisiohjelmaa, kuten Matlab/Octave.
   `A=[1 0 -3;2 2 9;...]; b=[8;7;-2]; x=A\b`

3. Annettuna on porrasmuotoon saatettujen lineaaristen systeemien liitännäismatriiseja muodossa, jossa $\blacksquare$ tarkoittaa nollasta poikkeavaa lukua, $*$ mielivaltaista lukua (nolla tai ei) ja 0 tarkoittaa puhdasta nollaa. Kerro kussakin tapauksessa, montako yhtälöä ja tuntematonta on, onko systeemi konsistentti vai ei ja konsistentissa tapauksessa ratkaisujen lukumäärä. Jos lukumäärä on ääretön, selvitä, kuinka monta vapaata parametria ratkaisussa on.

   (a) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$

4. Olkoon annettu yhtälösysteemi $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 6 \\ 3x_2 + q\,x_3 = t \end{cases}$ **Sanonta:** Systeemi on *singulaarinen*, jos sillä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua (vaan joko 1) ... tai 2) ...) .

(a) Määritä luku q siten, että systeemi on singulaarinen.
(b) Millä t:n arvoilla systeemillä on tällöin ratkaisuja?
(c) Määritä tällöin se ratkaisu, jolla $x_3 = 1$.

5. *Tasapainolämpötilajakauma metallilevyssä* Kuva esittää metallilevyä, joka on ylä- ja alapinnoiltaan lämpöeristetty ja jonka reunojen lämpötilat on kiinnitetty. (Lämpöä virtaa vain reunojen kautta.) Tasapainolämpötilajakauma saadaan *Laplacen yhtälön* $\Delta u = 0$ ratkaisuna. Numeerinen approksimaatio voidaan laskea ns. differenssimenetelmällä: Jaetaan levy sopivilla hilaviivoilla osiin ja numeroidaan näin muodostuvat solmupisteet. Menetelmä: Kunkin hilasolmun lämpötila on naapurisolmujen lämpötilojen keskiarvo. (Johdetaan kurssin lopulla.)

   Muodosta $4\times 4-$ yhtälösysteemi solmujen $1, 2, 3, 4$ lämpötilojen likiarvoille u_1, u_2, u_3, u_4. Ohje: Aloitetaan solmusta 1: $u_1 = \frac{1}{4}(30 + u_2 + u_3 + 10)$. Vastaavasti muut kolme solmua. (Tehtävä jatkuu loppuviikolla.)

```
            20        20
     |----- o  ----  o ------|
     |                       |
     |                       |
  10 o      o 3      o 4     o  40
     |                       |
     |                       |
  10 o      o 1      o 2     o  40
     |                       |
     |                       |
     |----- o ------ o ------|
            30       30
```

Loppuviikko

1. (a) Ratkaise AV tehtävän 5 (lämpö)yhtälösysteemi ja sijoita ratkaisulämpötilat ao. hilapisteisiin.
   (b) ("vapaaehtoinen") Muodosta $4 \times 4-$ matriisi, jossa on reunalämpötilat ja ratkaisemasi sisäpistelämpötilat sekä nurkissa lähinnä olevien kahden reunasolmun keskiarvot tähän tapaan: `U=[5 20 20 30;10 u3 u4 40; 10 u1 u2 40; 20 30 30 35];` Piirrä ratkaisupinnan approksimaatio: `mesh(U)` tai `surf(U)`.

2. (a) Määritä lukuja g, h, k koskeva ehto sille, että liitännäismatriisin $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}$ määräämällä systeemillä olisi ratkaisuja.
   (b) Määritä tällä ehdolla yleinen ratkaisu, kun $k = 1$ ja $h = -1$.

   Vast: (a) $h + 2g + k = 0$.

3. (a) Olkoon 3×5 *kerroinmatriisilla* A kolme tukisaraketta. Onko systeemi $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ konsistentti.
   (b) Olkoon 3×6-systeemin *liitännäismatriisin* Ab viimeinen (seitsemäs) sarake tukisarake. Onko systeemi konsistentti vai ei?
   (c) Olkoon systeemin kerroinmatriisin A jokaisella rivillä tukialkio. Selvitä, miksi systeemi on konsistentti.

4. (a) Kirjoita vektoriyhtälö
   $x_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ matriisiyhtälöksi $A\,x = b$.

   (b) Kirjoita yhtälösysteemi $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 2 \\ 8x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 15 \end{cases}$ vektoriyhtälöksi.

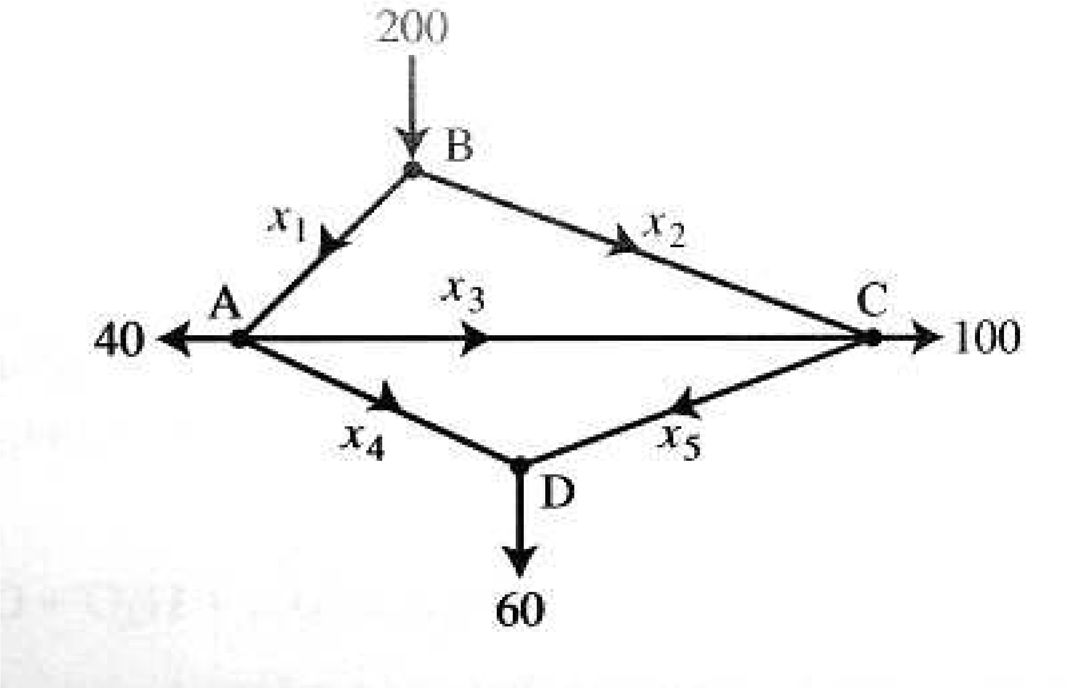
   Mieti eri muotojen geometrisia tulkintoja

   Kyllä vaan, tehtävä on todella näin vaatimaton, siis sarakemuodosta rivimuotoon ja toisinpäin.

5. Muodostavatko alla olevien matriisien sarakevektorit lineaarisesti riippumattoman (`LRT`) vai riippuvan (`LRV`) vektorijoukon.
   (a) $\begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

   Ohje: Kirjoita LRT/LRV-vektoriyhtälö ja muokkaa se matriisiyhtälöksi. Tarkoitus on ymmärtää, eikä "Gaussata" mekaanisesti.
   Huom: Jälkimmäisessäkin saat mielellään laskea ref-muodon, mutta saat myös päätellä tukialkioiden lukumäärätiedon perusteella. Pyydän, että et tässä vetoa tyyppiä "$\mathbb{R}^3$:n 4 vektoria ovat aina ..." olevaan lauseeseen, vaikka se onkin hyvä ohjenuora elämän varrelle.

6. Oheinen kuva esittää liikenneverkkoa. Kuhunkin solmuun A,B,C,D tulevien ja siitä lähtevien ajoneuvojen lukumäärien summa pysyy samana (solmuun ei häviä eikä siinä synny ajoneuvoja). Kadut ovat yksisuuntaisia nuolien osoittamalla tavalla.



(a) Muodosta yhtälösysteemi tuntemattomien ajoneuvomäärien $x_1, \dots x_5$ suhteen.
(b) Määritä systeemin yleinen ratkaisu.
(c) Jos x_4:llä merkitty katuosuus suljetaan, niin mikä on yleinen ratkaisu?
(d) Määritä kohdan (c) tilanteessa pienin x_1 :n ja suurin x_3 :n arvo (jotta yhdensuuntaisuutta osoittavia liikennemerkkejä ei tarvitse kääntää).

Huom! Porrasmuotoon saattamisessa saat halutessasi käyttää Matlab/Octave-funktiota `rref` (kts. `help rref`).