Mat-5.3740 Kontinuumimekaniikka **Lyly / Hannukainen**
Harjoitus 9, 28.11.2007 14-16 U322

Huomaa, että harjoitusten ja luentojen ajat on vaihdettu

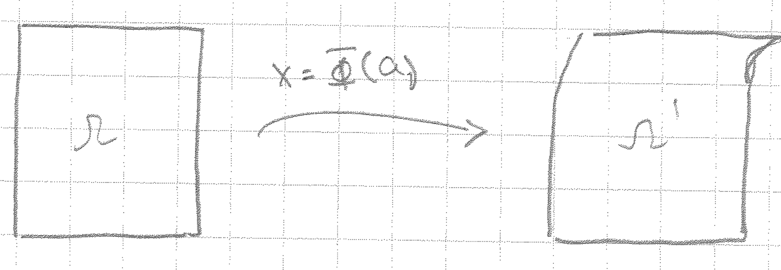
Tehtävä 1 on palautettava kotitehtävä. Palauta vastaus laskuharjoituksiin tai huoneen Y323b edessä olevaan lokeroon viimeistään maanantaina 3.12.2007 klo. 9:00.

1. Näytä, että nesteelle pitää päteä $3\lambda + 2\mu \geq 0$. (p. 114)
2. Käy läpi liikeyhtälön linearisointi (p. 204 + "sofistikoituneempi" versio)
3. Näytä, että ϵ_{ij} ja ω_{ij} avulla voidaan ratkaista u. (p. 208)
4. Johda Beltrami-yhtälö (p. 210)

2. Aikaisemmin liikeyhtälö esitettiin Eulerin-esitysmuodossa. Jos tarkastellaan nestettä, joka virtaa koko ajan samassa alueessa, tämä on hyvin perusteltua: alueen Ω-muoto pysyy koko ajan samana.

Kun halutaan tutkia tilannetta, jossa Ω:n muoto muttuu: $\Omega_t \neq \Omega_0$ Eulerin esityksessä on vaikeaa tunnistaa mitkä $x \in \Omega_t$:iden $\Rightarrow$ Lagrangen esitys:

Tark. tilannetta, jossa Ω deformoituu Ω_t:iden.



Yritetään kirjoittaa liikeyhtälö Ω:n koordinaateissa:

<u>Voima-Tasapaino:</u>

$$\int_{\partial\Omega_t} T(x) \cdot n \, dA + \int_{\Omega_t} f \, dV = \int_{\Omega_t} \ddot{\gamma} \rho \, dV$$

$$\int_{\partial\Omega_t} T(x) \cdot n \, dA = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(T(x)) \, dA$$

Tämä osataan muuntaa aikaisemman nojalla:

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div}(T(x)) \, dA = \int_{\Omega_0} \underbrace{(\operatorname{div} T)_x}_{\text{divergenssi } x\text{-koordinaateissa.}} (\Phi(a)) \det F \, dA$$

$(F = \nabla \Phi)$

Jotta tämä saadaan takaisin pinta-integraaliksi ja divergenssi ilmaistua a:n suhteen

käytetään (oheista) Piola-Nanson kaavaa:

$$= \int_{\Omega_0} \operatorname{div}\left(\det F\, F^{-1}\, T(\Phi(a))\right) \cdot n \, dA \qquad (F = \nabla \Phi(x))$$

$$= \int_{\partial\Omega_0} \det F\, F^{-T}\, T(\Phi(a)) \cdot n \, dA$$

tämä on ns. Piola-Kirchhoff jännitystensori, eli S.

Ts. voimat ja kiihtyvyys muuntuvat "normaalisti".

Saadaan siis uusi liikeyhtälö:

$$\int_{\partial\Omega_0} S n + \int_{\Omega_0} b = \int_{\Omega_0} \ddot{\Phi} \rho \, dV$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Div} S + b = \rho \ddot{\Phi}}}$$

Joka on nyt a:n koordinaateissa.

S:n ja muodonmuutoksen yhteys ei ole lineaarinen, mutta voidaan todeta, ~~että~~

$$S(\varepsilon) = C(\varepsilon) + O(\nabla u) \qquad C(\varepsilon) = 2\mu\varepsilon + \lambda \operatorname{tr}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Div} C(\varepsilon) + b = \rho \ddot{\Phi}}} \quad \text{lin. yhtälö}$$

Piola - Muunnos:

olkoot $\phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ sileä,

$F = \nabla\phi$, $\underline{\det F > 0}$. (ei kosd. kierto ja.)

halutaan laskea $\int_{\partial\Omega_t} T(x)\, n(x)\, dA_x$

Gauss: $= \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(T(x))\, dV$

Muuttujan vaihto $= \int_{\hat{\Omega}} \operatorname{div}(T)(\phi(x)) \det F \, dV$ ✡

Miten taluaisin $\int_{\partial\tilde{\Omega}}$? :

otetaan avuksi ns. Piola-muunnos.

$$\operatorname{div}(\det F\, F^{-1}(x)\, q(\phi(x))) = (\operatorname{div} q)(\phi(x)) \det F$$

tod: olkoon $e \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\det F\, F^{-1}(x)\, q(\phi(x)))\, e\, dx$$

← osittaisintegrointi

$$= -\int_\Omega \det F\, F^{-1}(x)\, q(\phi(x)) \cdot \nabla e\, dx$$

$$= -\int_{\Omega} q(\phi(x)) \cdot F^{-T} \nabla \varphi(x) \det F \, dx \qquad \begin{pmatrix} Aa \cdot b = (a^T A^T) b \\ = a \cdot A^T b \end{pmatrix}$$

Gradientti osataan kuvata:

$$= -\int_{\phi(\Omega)} q(\hat{x}) (\nabla \varphi)(\phi^{-1}(\hat{x})) \, d\hat{x}$$

$$= -\int_{\phi(\Omega)} \operatorname{div} q(\hat{x}) \, \varphi(\phi^{-1}(\hat{x})) \, dx$$

$$= \int_{\Omega} (\operatorname{div} q)(\phi(x)) \varphi(x) \, dx$$

tosi $\forall \varphi$ $\Rightarrow$ tosi vahvassa mielessä (pisteittäin).

---

eli saadaan muuttavasti

$$\text{✡} = \int_{\hat{\Omega}} \operatorname{div}\left(\det(F) F^{-T} T(\Phi(x))\right) dx$$

$$= \int_{\partial \hat{\Omega}} \det F \, F^{-1} \, T(\Phi(x)) n \, dx$$

2.

"Yhteensopimus yhtälöt: Millaisen yhtälön ε toteuttaa ?"

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{- venymätensori}$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad \text{- Rotaatio tensori}$$

ε ja w kuvaavat venymät ja kokonaisuudessaan.

Ratkaistaan: $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + w_{ij}$

Kysymys: voiko u:n ratkoa $\uparrow$ yhtälöstä ?

tilanne joka tulee
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \ldots \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \ldots \end{aligned}\right\} \text{ pitää olla "yhteensopivia"}$$

Mittaava yht. sop. $\frac{\partial u}{\partial xy} = \frac{\partial u}{\partial y x} = \ldots$ jolloin voi integroida.

eli tarkastetaan, ~~että~~. $u_{i,jk} = u_{i,kj}$

eli $\varepsilon_{ij,k} + w_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} + w_{ik,j}$

tämä seuraa:

$$w_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{j,ik})$$

$$= \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{k,ij}) - \frac{1}{2}(u_{k,ij} + u_{j,ik})$$

$$= \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}$$

ja symmetriasta $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$:

<u>Sijoitus:</u>

$$\cancel{\varepsilon_{ij,ik}} + \cancel{\varepsilon_{ik,ij}} - \varepsilon_{jk,ii} = \cancel{\varepsilon_{ik,ij}} + \cancel{\varepsilon_{ij,ik}} - \varepsilon_{kj,ii}$$

$$-\varepsilon_{jk,ii} = -\varepsilon_{kj,ii}$$

$\Rightarrow$ tämä on ok symmetrian pohjalta.

$\Rightarrow$ Ratkaisu on löytynyt.

sopivasti summaamalla saadaan $\Big\|$ $w_{ij,kk} = w_{ij,kk}$:

$$e = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}.$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} + (3e)_{,ij} - (\varepsilon_{ik,jk} + \varepsilon_{jk,ik}) = 0$$

tämä on siis jotain, mitä ε-aina toteuttaa

7. Materiaalilaki oli

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E}s\delta_{ij}$$

trace puolittain antaa:

$$3e = \frac{1+\nu}{E}3s - \frac{\nu}{E}3\cdot 3s$$

$$e = \frac{1+\nu}{E}s - \frac{3\nu}{E}s$$

$$e = \frac{1-2\nu}{E}s.$$

Sijotus yhteensopivuusehtoon: (oletetaan statiikka $\sigma_{ij,j} = 0$.)

$$\frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{il} - \frac{3\nu}{E}\overbrace{(\Delta s)}^{=0 \text{ kun } f=0.}\delta_{il} + \frac{3(1-2\nu)}{E}s_{,il}$$

$$- \frac{1+\nu}{E}\underbrace{(\sigma_{ik,lk} + \sigma_{lk,ik})}_{=0, \text{ kun } f=0} + \frac{3\nu}{E}\underbrace{\left((s\delta_{ik})_{,lk} + (s\delta_{lk})_{,ik}\right)}_{=2s_{,il}} = 0$$

jaetaan $\frac{1+\nu}{E}$

$$\Delta\sigma_{il} + \frac{3(1-2\nu)}{1+\nu}s_{,il} + \frac{3\nu}{1+\nu}\cdot 2s_{,il} = 0$$

$$\underbrace{\Delta\sigma_{il} + \frac{3}{1+\nu}s_{,il} = 0.}$$

eli σ pitää toteuttaa tämä yhtälö.