Mat-5.3740 Kontinuumimekaniikka **Lyly / Hannukainen**
Harjoitus 6, 8.11.2007 12-14 Y313

Tehtävä 1 on palautettava kotitehtävä. Palauta vastaus laskuharjoituksiin tai huoneen Y323b edessä olevaan lokeroon viimeistään maanantaina 12.11.2007 klo. 9:00.

1. Käyttäen kohdan 4. tulosta, johda ehto energian säilymislaille

2. Koska pätee div $(\epsilon(U)) = \Delta U$?

3. (Epäjatkuva konsentraatio) Johda kaava suureelle

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} C dx$$

kun konsentraatio C on epäjatkuva rajapinnan Σ_t yli. Rajapinta liikkuu nopeudella W, joka eroaa massapisteiden nopeudesta U.

4. (Yleinen säilymislaki) Oletetaan, että pätee

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega'_t} C dx = \int_{\Omega'_t} f dx \quad \forall \Omega'_t \subset \Omega$$

johda ehto konsentraatiolle.

5. Käyttäen kohdan 4. tulosta, johda ehto massan ja liikemäärän säilymislaille

2. $\operatorname{div}(\varepsilon(u)) = \Delta u$

eli $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

$\operatorname{div}(\varepsilon(u)) = \frac{1}{2} u_{i,ji} + u_{j,ij}$

$u_{i,jj} + u_j$

$\varepsilon(u)_i = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

$$\operatorname{div}(\varepsilon(u)_i) = \frac{1}{2}(u_{i,ji} + \underbrace{u_{j,ii}}_{= \Delta u})$$

koska $= 0$?

$(u_{i,i})_{,j} = 0$ $\quad \underline{\operatorname{div}(u) = 0.}$

3.

ENSIN TARKASTELTAVA TILANNE: Ω_t on alue, Σ_t on alueen eessa oleva rajapinta.

Ω_t:n liikkeen määrää Φ

Σ_t:n liikkeen määrää ε

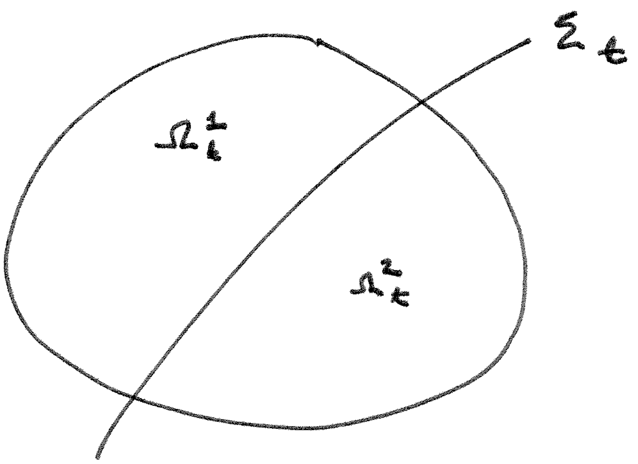
Oleellista on, että Σ_t voi edetä eri nopeudella Ω_t:n massapisteisiin nähden.

Σ_t:n etenemisnopeus on W.

Ω_t:n etenemisnopeus on U.

(tämä voidaan lausua $\Sigma_{0t} \neq \Phi^{-1}(\Sigma_t)$)

Tilanne:



Oletus: Ω_t^1 ja Ω_t^2 voidaan kuvata C^1-alkukuvaksi Ω_0:ssa.

Aikaisemmin johdettiin yhtälö

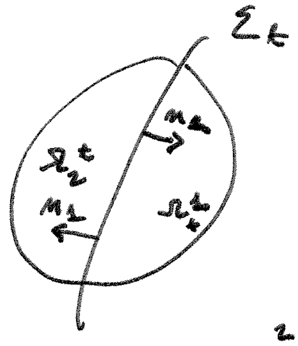
$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} c\,dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t}\,dx + \int_{\Gamma_t} c\,U\cdot n\,dx \quad (1)$$

Remark 1.9 - mukaan tämä yhtälö pätee, kun rajapinta on liikkeessä jos U tulkitaan rajapinnan nopeudeksi.

Käytetään (1) kummassakin alueessa

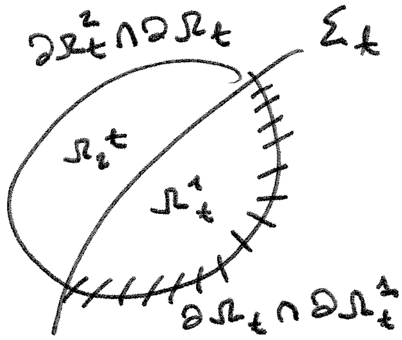
$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t^i} C\,dx = \int_{\Omega_t^i} \frac{\partial c}{\partial t}\,dx + \int_{\partial\Omega_t^i} cU\cdot n\,dx \quad, i=1,2.$$

normaali n on alueen $\partial\Omega_t^i$ reunan ulkonormaali, joten Σ_t:llä pätee $n_1 = -n_2$.



Jaetaan reunatermit osiin:

$$\int_{\partial\Omega_t^i} = \int_{\partial\Omega_t^i\cap\partial\Omega_t} + \int_{\Sigma_t}$$



valitaan $N = n_1$.

Saadaan

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t^1} C\,dx = \int_{\Omega_t^1} \frac{\partial c}{\partial t}\,dx + \int_{\partial\Omega_t^1\cap\partial\Omega} CU\cdot n\,d\Gamma + \int_{\Sigma_t} CW\cdot N\,d\Gamma$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t^2} C\,dx = \int_{\Omega_t^2} \frac{\partial c}{\partial t}\,dx + \int_{\partial\Omega_t^2\cap\partial\Omega_2} - \int_{\Sigma_t} CW\cdot N\,d\Gamma$$

Muistetaan, että C on epäjatkuva ja lasketaan yhteen:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} C\,dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t}\,dx + \int_{\partial\Omega_t^1\cap\partial\Omega} CU\cdot n\,d\Gamma + \int_{\partial\Omega_t^2\cap\partial\Omega} CU\cdot n\,d\Gamma$$

$$+\int_{\Sigma_t} [cw] \cdot N \, d\Gamma \, .$$

Käytetään Gaussin lausetta Ω_t^1 ja Ω_t^2 erikseen (ei voi epäjatk. takia käyttää koko alueessa).

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} c\,dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t} + \int_{\Omega_t^1 \cup \Omega_t^2} \operatorname{div}(cu) - \int_{\Sigma_t} [cu] \cdot N \, d\Gamma$$

$$+ \int_{\Sigma_t} [cw] \cdot N \, d\Gamma$$

Saadaan

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} c = \int_{\Omega_t^1 \cup \Omega_t^2} \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(cu) + \int_{\Sigma_t} [cV] \cdot N \, d\Gamma \qquad \square$$

$V = u - w$, eli suhteellinen rajapinnan etenemisnopeus.

4.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t^1} c\,dx = \int_{\Omega_t^1} f\,dx \qquad \forall\, \Omega_t^1 \subset \Omega .$$

tästä seuraa 3. kohdan mukaan:

$$\int_{(\Omega_t^1 \cup \Omega_t^2)\cap \Omega_t^1} \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(cv) - f \,dx + \int_{\Sigma_t \cap \overline{\Omega}_t^1} [cv]\cdot N\,d\Gamma = 0$$

joten on oltava:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(cv) = f \qquad \forall\, \Omega_t^i$$

Sekä $\displaystyle\int_{\Sigma_t^1} [cv]\cdot N\,d\Gamma = 0 \qquad \forall\, \Sigma_t^1 \subset \Sigma$

joten $[cv]\cdot N = 0.$

5.

Massan säilymislaki:

$C = \rho, \quad f = 0$

josta saadaan suoraan

$$\rho_1 v_1 \cdot N = \rho_2 v_2 \cdot N$$

siis $\quad v_1 \cdot N = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} v_2 \cdot N$

Joka sanoo, että Ω_t^1 Ω_t^2 pitää virrata massaa sellaisella nopeudella, että tasapaino säilyy.

Liikemäärän säilymislaki:

$C = \rho v$ ja säilymislaki tulee motoon

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^1} \rho v_i = \int_{\Omega_t^1} (f_i + \sigma_{ij,j})\, dx \quad \forall\ \Omega_t^1 \subset \Omega_t$$

(siis liikemäärän muutos = voimien summa)

Materiaalit ovat erilaisia eri alueissa, jolloin σ on epäjatkuva.

Käytetään 4-kohdan todistusta osittain:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho v_i = \int_{\Omega_t'} f_i + \int_{\partial\Omega_t'} \sigma_{ij} n_j \, dx$$

$$= \int_{(\Omega_t' \cup \Omega_t'') \cap \Omega_t'} \operatorname{div}(\sigma_i) + \int_{\Sigma_t} [\sigma_{ij} n_j] \, dx$$

Saadaan siis:

$$\int_{\Sigma_t'} [c v]\cdot N - [\sigma_{ij} n_j] = 0 \qquad \forall\, \Sigma_t' \subset \Sigma_t$$

eli $[cv]\cdot N = [\sigma \cdot N]$

eli $[\rho U V]\cdot N = [\sigma \cdot N]$

Joka vastaa pintavoimien tasapainoa:

$[\rho V \cdot N] = 0$ massan säil. lain mukaan

$$\Rightarrow \quad m[U] = \underbrace{[T]}_{\text{"pintavoima"}}$$