Mat-5.3740 Kontinuumimekaniikka **Lyly / Hannukainen**
Harjoitus 2, 27.9.2007 12-14 Y313

Tehtävä 1 on palautettava kotitehtävä. Palauta vastaus laskuharjoituksiin tai huoneen Y323b edessä olevaan lokeroon viimeistään maanantaina 1.10.2007 klo. 9:00.

1. (Osa tod. p.18) Todista, että

$$\det(I + \epsilon T) = I + \epsilon \mathrm{tr} T + O(\epsilon^2).$$

Jos olit läsnä viime viikolla, keksi erilainen todistus. Voit esimerkiksi käyttää identiteettejä

(i) $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ ja
(ii) $\sum \lambda_i = \mathrm{tr} A$, jossa λ_i:t ovat matriisin A ominaisarvoja.

2. Todista ensimmäisen tehtävän vinkin identiteetit (i) ja (ii).

3. (TM. ex.6 p.22) Todista derivointikaavat

(i) $\mathrm{div}\,(\Psi u) = \nabla \Psi \cdot u + \Psi \mathrm{div}\ u$
(ii) $\mathrm{curl}\,(\Psi u) = \nabla \Psi \times u + \Psi \mathrm{curl}\ u$
(iii) $\mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\ u = -\Delta u + \nabla \mathrm{div}\ u$
(iv) $\mathrm{div}\ (u \times v) = v \cdot \mathrm{curl}\ u - u \cdot \mathrm{curl}\ v$
(v) $\mathrm{curl}\ (u \times v) = u\ \mathrm{div}\ v - v\ \mathrm{div}\ u + (v \cdot \nabla)\, u - (u \cdot \nabla)\, v,$

jossa $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ja $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

4. (TM. ex.7 p.22) Todista Greenin kaavan avulla identiteetit

(i) $\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\ dx = \int\limits_{\partial\Omega} u n_i d\Gamma$
(ii) $\int\limits_{\Omega} \Delta u v\ dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ d\Gamma - \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$
(iii) $\int\limits_{\Omega} (\Delta u v - u \Delta v)\ dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u\right)\ d\Gamma$
(iv) $\int\limits_{\partial\Omega} u \cdot \mathrm{curl} v\ dx = \int\limits_{\Omega} v \cdot \mathrm{curl}\ u\ dx - \int_{\partial\Omega} (u \times v) \cdot n\ d\Gamma,$

kohdissa (i)-(iii) u ja v ovat skalaariarvoisia kuvauksia. Kohdassa (iv) u ja v ovat vektoriarvoisia.

5. Laske derivaatta seuraaville lineaarikuvauksille $G(A) : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$:

(i) $G(A) : A \to (\mathrm{tr}\ A)\, A$
(ii) $G(A) : A \to ABA,$ jossa B on annettu matriisi
(iii) $G(A) : A \to A^T A$
(iv) $G(A) : A \to (u \cdot Au)\, A,$ jossa u on annettu vektori