(1)

Mallit / Koemos 1

$\det(I + \varepsilon T) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(T) + O(\varepsilon^2)$

oli determinantti kehitelmällä:

induktio todistus:

totta 2x2- matriisille

$\det(I+\varepsilon T) = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon t_{11} & \varepsilon t_{12} \\ \varepsilon t_{21} & 1+\varepsilon t_{22} \end{pmatrix} = 1 + \varepsilon t_{11} + \varepsilon^2 (t_{12} + t_{21})$

ok.

oletus: totta n-dim. matriisille

n+1: det-kehitelmä

$\det(I+\varepsilon T) = (1+\varepsilon) t_{11} \overbrace{\begin{vmatrix} t_{22} & \\ & \ddots \end{vmatrix}}^{ok}$

+ matriiseja εt_{i1} joissa yksi rivi pelkkää ε

vri permutoida ekaksi

$(\mp 1) \varepsilon t_{i1} \begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1+\varepsilon & & \\ \varepsilon & & 1+\varepsilon & \\ \varepsilon & & & \ddots \\ \varepsilon & & & \end{vmatrix} = \varepsilon^2 t_{i1}$

=> ok.

2.

Jäykän kappaleen liike: (rigid body motion)

$\forall\, \bar{a}, \bar{a}' \in \Omega_0$ pätee $d(\bar{x},\bar{x}') = d(\bar{a},\bar{a}')$ jossa

$$\bar{x} = \bar{\Phi}(\bar{a}) \quad , \quad \bar{x}' = \bar{\Phi}(\bar{a}').$$

eli materiaalipisteiden väliset etäisyydet säilyvät.

toisin sanoen

$$\|\bar{x}-\bar{x}'\|^2 \text{ on vakio } (= \|\bar{a}-\bar{a}'\|^2)$$

$$\frac{d}{dt}\|\bar{x}-\bar{x}'\|^2 = 0$$

Käytetään $\bar{x} = \bar{\Phi}(\bar{a},t)$ $\quad \bar{x}' = \bar{\Phi}(\bar{a}',t)$

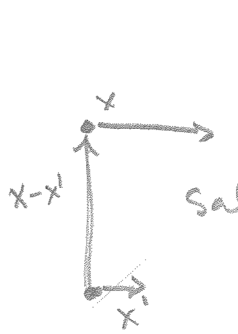
$$\frac{d}{dt}\|\bar{\Phi}(\bar{a},t) - \bar{\Phi}(\bar{a}',t)\|^2$$

$$= \frac{d}{dt}\sum\left(\Phi_i(\bar{a},t) - \Phi_i(\bar{a}',t)\right)^2$$

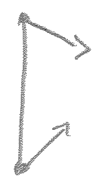
$$= 2\sum\left(\Phi_i(\bar{a},t) - \Phi_i(\bar{a}',t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi_i(\bar{a},t) - \frac{\partial}{\partial t}\Phi_i(\bar{a}',t)\right)$$

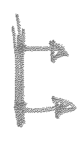
$$= 2\left(\Phi(a) - \Phi(a')\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi(a) - \frac{\partial}{\partial t}\Phi(a')\right)$$

$$\Longrightarrow \quad (x-x')\cdot(u(x,t) - u(x',t)) = 0$$

eli 

sallittu: "Rotaatioa".

 kielletty

 sallittu.

3.

apulause : $\forall \; B \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad B = -B^T$

$\exists \; \omega \in \mathbb{R}^3$ s.e.

$$\omega \times x = Bx$$

Jokainen $B = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$

olkoot $\omega = [a \quad b \quad c]^T$

$$\omega \times x = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{matrix} i(bx_3 - cx_2) \\ j(cx_1 - ax_3) \\ k(ax_2 - bx_1) \end{matrix}$$

$$Bx = \begin{matrix} (-\alpha x_2 - \beta x_3) \\ (\alpha x_1 - \gamma x_3) \\ (\beta x_1 + \gamma x_2) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} b = -\beta \\ a = \gamma \\ c = -\alpha \end{matrix} \quad \square$$

$$\omega = [\gamma \quad -\beta \quad -\alpha]^T$$

3. $u(x) = Bx + b \iff U(x)$ jäyk. kpl liikkeen nopeuskenttä

käytetään apuna 2-tehtävää:

1. "$\Rightarrow$"

oletus: $u(x) = Bx + b$

2. teht. mukaan $U(x)$ on j.k.l. nopeuskenttä joss

$$(x - x') \cdot (u(x) - u(x')) = 0 \qquad \forall x, x' \in \Omega_*$$

suoralla sijoituksella:

$$(x - x') \cdot (B(x - x')) = (x - x') \cdot w \times (x - x') = 0$$

x-tulon määritelmä.

2. "$\Leftarrow$"

Idea: ongitaan tietoa U:sta eri suunnista.

tätä varten valitaan koord. s.e. $0 \in \Omega$ ja $B(1,0) \subset \Omega$. (siirto + skaalaus. Sulkee pois 2D-alueet yms..)

Merkitään $U(0) = b$ ja $V(x) = U(x) - b$.

$V(x)$:lle pätee:

$$V(x) \cdot x = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

"ongitaan tietoa":

$$(x - e_i) \cdot (U(x) - U(e_i)) = 0$$

$$(x - e_i) \cdot (U(x) - b - (U(e_i) - b)) = 0$$

$$(x - e_i) \cdot (V(x) - V(e_i)) = 0$$

$$\Rightarrow V(x) \cdot e_i = - V(e_i) \cdot x$$

3. joten vektori $V(x)$ voidaan kirjoittaa muotoon:

$$V(x) = \begin{pmatrix} V(x)\cdot e_1 \\ V(x)\cdot e_2 \\ V(x)\cdot e_3 \end{pmatrix} = \sum (V(x)\cdot e_i)\, e_i$$

$$= \sum (V(e_i)\cdot x)\, e_i$$

$$\underbrace{\left(= V(e_i) \otimes e_i \right)}_{\text{einsteint tehtävän 1-notaatiolla}} \qquad = \underbrace{\left(\sum e_i V(e_i)^T \right)}_{\text{Matriisi } B} x = Bx$$

$$B_{ij} = e_i^T B e_j = V(e_i)^T e_j = V(e_i)\cdot e_j$$

Nyt:

$$V(x)\cdot x = 0 \implies B_{ii} = 0$$

$$V(x)\cdot e_i = -V(e_i)\cdot x \implies B_{ij} = -B_{ji}$$

$\Rightarrow$ B on vinosymmetrinen.

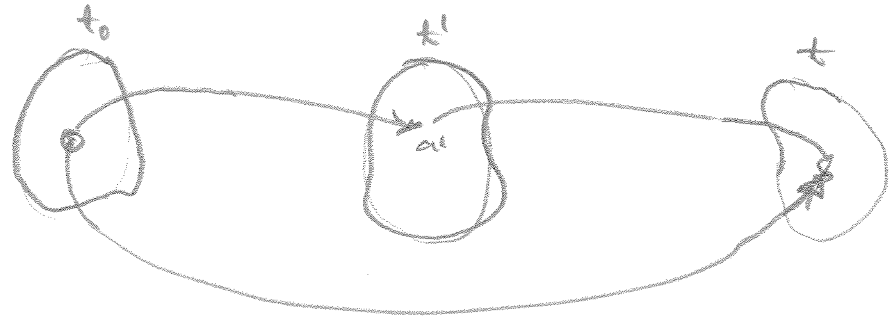
$$V(x) = Bx \implies \underline{U(x) = B(x) + b} \quad \square$$

4.

$$U(x,t) = \frac{\partial \Phi(a,t,t_0)}{\partial t}$$

U – riippumaton t_0:in valinnasta.

Φ-ominaisuus



$$\Phi(a,t,t_0) = \Phi(\Phi(a,t',t_0),t,t')$$

$$U(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(a',t,t')\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(\Phi(a,t',t_0),t,t')\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(a,t,t_0)\right)$$

Samoin γ:lle. $\gamma = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(a,t,t_0)$.

Materiaali derivaatta.

istut kyydissä Lagrange

katsot ulkoa: $\underline{\underline{\text{Euler.}}}$

$$\underbrace{f(M,t)}_{} = g(a,t) \quad \text{tai} \quad = h(x,t)$$

jokin/kappaleen
M ominaisuus

Miten f:n muutos eri esityksissä?

$$\frac{\partial}{\partial t} g(a,t) = \frac{\partial}{\partial t} h(\Phi(a,t), t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} h(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, t)$$

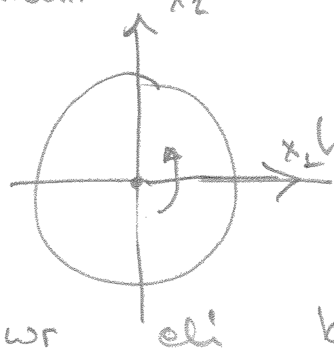
$$= h_t + h_{x_1} \frac{\partial}{\partial t}\Phi_1 + h_{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\Phi_2 + h_{x_3} \frac{\partial}{\partial t}\Phi_3$$

$$= h_t + h_{,i} \dot{\Phi}_i$$

$$= \underline{\underline{h_t + h_{,i} v_i}} = \underline{\underline{h_t + (v \cdot \nabla) h}} \quad \square$$

5.

Pyörimisliike:



liikkuu samalla.

$v = \omega r$ eli keskipisteen nopeus on $\underline{\omega r}$.

massapisteen (a_1, a_2, a_3) paikka hetkellä t:

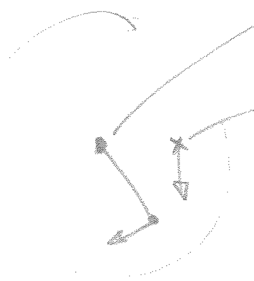
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sin(\omega t + \phi_a) + \omega R\, t \\ x_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\cos(\omega t + \phi_a) \\ x_3 = a_3 \\ \\ x = \Phi(a, t) \end{cases}$$

Lagrangen esitys

$\phi_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ - kulma.

Eulerin esitys:

$$O: \begin{pmatrix} \omega R t \\ R \\ x_3 \end{pmatrix}$$



piste $x \longrightarrow \vec{r} = (x - o)$

$$\underline{v = \omega R\, \vec{i} + \omega k \times \vec{r}}$$

joten $u(x, t) = \omega R\, \vec{i} + \omega \vec{k} \times \left(x - \begin{pmatrix} \omega R t \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 - \omega R t & x_2 & 0 \end{vmatrix} = \omega (x_1 - \omega R t)\, j + (\quad - \omega x_2)$$

$u(x, t) = \omega (x_1 - \omega R t)\, j + (\quad - \omega x_2 + \omega R \quad)\, i$ $\underline{\text{ok.}}$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = v(x,t)$$

joten

$$\begin{cases} x_1' = -r_A \omega \cos(\omega t + \phi_A) + \omega R = -\omega x_2 + \omega R \\ x_2' = r_A \omega \sin(\omega t + \phi_A) = \omega (x_1 - \omega R t) \end{cases}$$

ok.
$L = E$

Kiihtyvyys:

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v$$

$$= \omega R\, j + \left((-\omega x_2 + \omega R) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\omega x_1 - \omega^2 R t) \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$\underbrace{(-\omega x_2 + \omega R)\, i + (\omega x_1 - \omega^2 R t)\, j}$$

$$-\omega^2 R t j + (-\omega x_2 + \omega R) \omega\, j + (\omega x_1 - \omega^2 R t)(\omega)\, i$$

$$= (-\omega^2 x_2 + \omega^2 R - \omega^2 R t)\, j + (\omega^2 x_1 - \omega^2 R t)\, i.$$

2. Todistetaan identiteetit

Malleit / kassos 2.

$$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \quad \text{ja}$$

$$\sum \lambda_i = tr(A)$$

λ_i:t ovat A:n ominaisarvoja.

=

käytetään A:n karakteristista polynomia:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

koska ominaisarvot ovat $p_A(\lambda)$:n nollakohtia, saadaan

$$p_A(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n), \quad \text{jossa}$$

kerroin $a_n = (-1)^n$ (tämän voi nähdä laskemalla $\det(A - \lambda I)$:n.)

joten $\det(A) = p_A(0) = \prod \lambda_i$

=

Karakteristinen polynomi on avattuna:

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \left(\sum \lambda_i\right) \lambda^{n-1} + \cdots$$

$\det(A - \lambda I)$ avattuna (laske kehitelmästä!)

antaa

$$\cdots + \underbrace{(-1)^{n-1} a_{nn} \lambda^{n-1}}_{} + \cdots$$

$$= (-1)^{n-1} tr(A) \lambda^{n-1}$$

□

3.

Määritellään LC-symboli

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{jos 2 samaa indeksiä} \\ 1 & i,j,k \text{ on } (1,2,3)\ (2,3,1)\ (3,1,2) \\ -1 & i,j,k \text{ on } (3,2,1)\ (1,3,2)\ (2,1,3) \end{cases}$$

eli 1 (i,j,k) on even (parillinen permutaatio: parillinen määrä indeksin vaihtoja

(-1 on pariton määrä ind. vaihtoja.

parilliset sallittuja

$\Rightarrow$ indeksin vaihdot $(i,j,k) \rightarrow (k,i,j)$

ominaisuus $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

$\delta_{jm} = 1 \quad j=m \quad , \quad 0 \quad$ muulloin

$$\text{curl}(\text{curl}\, u) = \varepsilon_{mni}(\varepsilon_{ijk}\, u_{k,j})_{,n}$$

$$= \varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk}\, u_{k,jn}$$

$$= \delta_{jm}\delta_{kn}\, u_{k,jn} - \delta_{jn}\delta_{km}\, u_{k,jn}$$

$$= \underbrace{u_{k,mk}}_{(\underbrace{u_{k,k}}_{})_{,m}} - \underbrace{u_{m,nn}}_{\Delta u}$$

m = koord. – ei korvata.

$$\nabla \cdot \text{div}\, u - \Delta u.$$

$$\mathrm{curl}\,(\psi u) = \varepsilon_{ijk}(\psi u_k)_{,j}$$

$$= \varepsilon_{ijk}(\psi_{,j} u_k) + \varepsilon_{ijk}\,\psi u_{k,j}$$

$$= \nabla\psi \times u + \psi\nabla\times u$$

$$\mathrm{div}\,(u \times v) = (\varepsilon_{ijk} u_j v_k)_{,i}$$

2-perm

ijk

$$= \varepsilon_{ijk} u_{j,i} v_k + \varepsilon_{ijk} u_j v_{k,i}$$

$$= v_k \varepsilon_{ijk} u_{j,i} + u_j \varepsilon_{ijk} v_{k,i}$$

ijk

1-perm

$$= v_k \varepsilon_{kij} u_{j,i} + - u_j \varepsilon_{jik} v_{k,i}$$

$$= v \cdot \nabla \times u - u \cdot \nabla \times v \;\square$$

$$\mathrm{curl}\,(u \times v) = \varepsilon_{mni}\left(\varepsilon_{ijk}(u_j v_k)\right)_{,n}$$

$$= \varepsilon_{mni}\left(\varepsilon_{ijk} u_{j,n} v_k + \varepsilon_{ijk} u_j v_{k,n}\right)$$

$$= \varepsilon_{mni}\varepsilon_{ijk} u_{j,n} v_k + \varepsilon_{mni}\varepsilon_{ijk} u_j v_{k,n}$$

$$\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk} u_{j,n} v_k + \varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk} u_j v_{k,n}$$

$$= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})(u_{j,n} v_k + u_j v_{k,n})$$

$$\delta_{jm}\delta_{kn} u_{j,n} v_k = u_{m,k} v_k = (v \cdot \nabla) u$$ +symm. $\square$

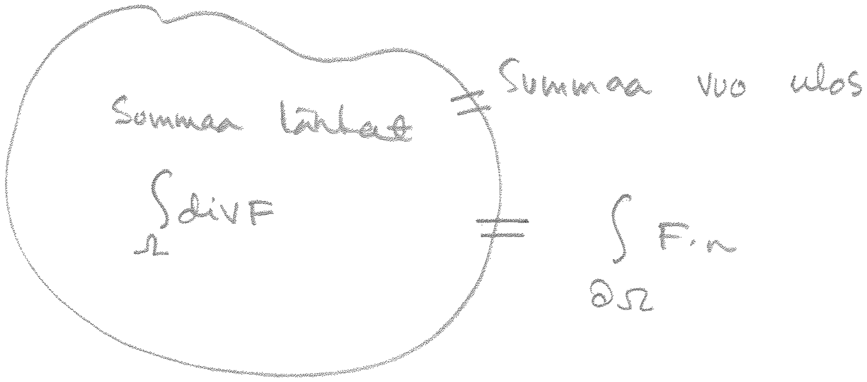
$$-\delta_{jn}\delta_{km} u_{j,n} v_k = u_{n,n} v_m = -v\,\mathrm{div}\,u$$

$$\operatorname{div}(\psi u) = (\psi u_i)_{,i}$$

$$= \psi_{,i} u_i + \psi u_{i,i}$$

$$= \nabla\psi \cdot u + \psi \operatorname{div} u.$$

4. Greenin kaava on helppo muistaa:



Eli Lähteet = vuo ulos

$$\int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F\cdot n .$$

(i) $$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} u\cdot n_i\,dx$$

Valitse $\vec{F} = u\,\vec{e}_i$

$$\begin{cases} \operatorname{div} F = F_{i,i} = u_{,i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \\ F\cdot n = u\,n_i \end{cases}$$

Joten tulos seuraa Greenin kaavasta

(ii) $$\int_\Omega \Delta u\cdot v\,dx = \int_{\partial\Omega} v\nabla u\cdot\vec{n} - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v$$

Valitse $\vec{F} = v\nabla u$

$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla v\cdot\nabla u + v\Delta u$ (Viime viikon laskarit)

$\vec{F}\cdot n = v\nabla u\cdot n$

Seuraa Green.

(iii) $$\int_\Omega (\Delta u\, v - u \Delta v) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right)$$

Valitse $F = \nabla u\, v - u \nabla v$

$$\operatorname{div} F = \Delta u\, v + \nabla u \cdot \cancel{\nabla v} - \cancel{\nabla u} \cdot \nabla v - u \Delta v$$

$$= (\Delta u\, v - u \Delta v)$$

$$F \cdot n = \nabla u \cdot n\, v - u \nabla v \cdot n$$

Green $\square$

(iv) $$\int_\Omega u \cdot \operatorname{curl} v = \int_\Omega v \cdot \operatorname{curl} u - \int_{\partial\Omega} (u \times v) \cdot n$$

Valitse $F = u \times v$

$$\operatorname{div}(u \times v) = v \operatorname{curl} u - u \operatorname{curl} v$$

$$F \cdot n = (u \times v) \cdot n$$

Green $\square$

5.

$$G(A): \mathbb{R}^{3\times 3} \mapsto \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$G(A): A \to \operatorname{tr} A \, A$$

Derivaatta suuntaan T:

$$DG(A)\cdot T = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G(A+\varepsilon T) - G(A)}{\varepsilon}$$

Jolloin

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{tr}(A+\varepsilon T)(\varepsilon T + A) - \operatorname{tr}(A) A}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{tr}(\cancel{A}) A + \operatorname{tr}(A)\varepsilon T + \varepsilon^2 \operatorname{tr}(T) T + \varepsilon \operatorname{tr}(A) T \; \cancel{-\operatorname{tr}(A}}{\varepsilon}$$

$$= \operatorname{tr}(A) T + \operatorname{tr}(T) A$$

$$G(A): ABA$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(A+\varepsilon T) B (A+\varepsilon T) - ABA}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ABA + \varepsilon(TBA + ABT) + \varepsilon^2 TBT - ABA}{\varepsilon}$$

$$= TBA + ABT$$

$$G(A): D(A^T A)\cdot T \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(A+\varepsilon T)^T (A+\varepsilon T)}{\varepsilon T}$$

$$= A^T T + T^T A$$

$$G(A): (m \cdot Am) A \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(m \cdot (A+\varepsilon T) m)(A+\varepsilon T)}{\varepsilon T} = (m \cdot Am) T + (m \cdot Tm) A$$

MALLIT / KIERROS 3

1.

laskutaan $\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{div}\,(cu)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\alpha x^2 y\, e^{-\alpha t}$$

$$\mathrm{div}\,(cu) = \mathrm{div}\begin{pmatrix} \alpha x^3 y e^{-\alpha t} \\ -\alpha x^2 y^2 e^{-\alpha t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\alpha t}\left(3\alpha x^2 y - 2\alpha x^2 y\right)$$

$$= e^{-\alpha t}\alpha x^2 y$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{div}\,(cu) = 0 \Rightarrow K(t) \text{ on vakio.}$$

Lagrangen esitys liikkeelle:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = \vec{u}(x(t)) \\ \vec{x}(0) = \vec{a} \end{cases}$$

eli ratkottavaksi tulee kaksi kytkemätöntä tehtävää:

$$\dot{x}(t) = \alpha x \qquad \dot{y}(t) = -\alpha y \qquad \Rightarrow \begin{cases} x = a_1 e^{\alpha t} \\ y = a_2 e^{-\alpha t} \\ z = Z \end{cases}$$

$$x(0) = a_1 \qquad y(0) = a_2$$

~~Suoraan integroimalla~~

$$\cancel{\int_{a_1}^{x(t)} \frac{dx}{\alpha x} = \int_0^t dt \Rightarrow \ldots} \qquad \cancel{x = c e^{\alpha x}} \qquad \cancel{x(0) = a_1}$$

Joten:

$$C = \beta x^2 y e^{-\alpha t} = \beta\, a_1^2 e^{2\alpha t} a_2 e^{-\alpha t} e^{-\alpha t}$$

$$= \underline{\underline{\beta\, a_1^2 a_2}} = \underline{\underline{\text{vakio.}}}$$

$f(M,t) = g(\vec{x},t) = h(\vec{a},t)$, jossa

$$g(\Phi(\vec{a},t),t) = h(\vec{a},t)$$

=

Muistutus: Φ oli kuvaus Ω_0:illata (eli referenssikonfiguraatiolta) Ω_t:lle. Se siis määrittää kappaleen liikkeen ja muodonmuutokset.

=

Yhteys $\nabla_a h$:n ja $\nabla_x g$:n välille saadaan derivoinnin ketjusäännön avulla:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} h(\vec{a},t) = \frac{\partial}{\partial a_i} g(\Phi(\vec{a},t),t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_i} g(\Phi_1(\vec{a},t), \Phi_2(\vec{a},t), \Phi_3(\vec{a},t), t)$$

$$= g_{,1}(\Phi(\vec{a},t),t)\,\Phi_{1,i}(\vec{a},t) +$$
$$g_{,2}(\Phi(\vec{a},t),t)\,\Phi_{2,i}(\vec{a},t) +$$
$$g_{,3}(\Phi(\vec{a},t),t)\,\Phi_{3,i}(\vec{a},t).$$

Tämä voidaan kirjoittaa matriisi vektori -tulona:

$$\nabla_a h(\vec{a},t) = \begin{pmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{2,1} & \Phi_{3,1} \\ \Phi_{1,2} & \Phi_{2,2} & \Phi_{3,2} \\ \Phi_{1,3} & \Phi_{2,3} & \Phi_{3,3} \end{pmatrix} \nabla_x g(\vec{x},t)$$

Yllä esiintyvä matriisi on Φ:n jakobin matriisin transpoosi, eli

$$\nabla_a h(\vec{a},t) = (D\Phi)^T \nabla_x g(\vec{x},t).$$

edelleen $\nabla_x g(\vec{x},t) = (D\Phi)^{-T} \nabla_a h(\vec{a},t)$, $\vec{x} = \Phi(\vec{a},t)$.

Seuraavassa tehtävässä tarkastellaan tilannetta, jossa

γ ja f ovat vektoriarvoisia.

tällöin

$$D_x\gamma = \begin{bmatrix} \nabla_x \gamma_1^T \\ \nabla_x \gamma_2^T \\ \nabla_x \gamma_3^T \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D_a h = \begin{bmatrix} \nabla_a h_1^T \\ \nabla_a h_2^T \\ \nabla_a h_3^T \end{bmatrix} .$$

aikaisemman perusteella

$$(\nabla_a h_i)^T = (\nabla_x \gamma_i)^T (D\Phi)$$

$$(\nabla_a h_i)^T (D\Phi)^{-1} = (\nabla_x \gamma_i)^T$$

Joten vektoriarvoisille suureille pätee:

$$(D_x \vec{\gamma}) = (D_a \vec{h})(D\Phi)^{-1} .$$

tai

$$(\nabla_x \vec{\gamma}) = (\vec{\nabla}_a \vec{h})(D\Phi)^{-1} .$$

#3/4

Lauseessa 1.3. lasketaan suureen

$$K(t) = \int_{\Omega_t} c(x,t)\, dV$$

derivaatta riittävien säännöllisyys oletusten vallitessa.

Koska integroimisalue riippuu ajasta, derivaatan suoraan laskeminen ei onnistu. Tilanne voidaan korjata muuttujan vaihdolla:

$$x = \Phi(a,t) \quad , \quad c(x,t) = c(\Phi(a,t),t)$$

$$\Omega_t \to \Omega_0 .$$

muuttujan vaihdossa pitää huomioida tilavuusalkion muutos:

$$dV_x \to |\det D\Phi|\, dV_a .$$

(□ → ▱)

koska Φ kuvaa systeemin liikettä, pätee oletusten mukaan

$\det D\Phi > 0 \quad \forall\ t, a.$ Jolloin

$$\int_{\Omega_t} c(x,t)\, dx = \int_{\Omega_0} c(\Phi(a,t),t) \det D\Phi \, da$$

Nyt aikaderivaatta voidaan viedä integraalin sisään

$$\frac{d}{dt} K(t) = \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} \left(c(\Phi(\vec{a},t),t) \det D\Phi(a,t) \right) da$$

laske taan derivaatta:

$$= \frac{\partial c}{\partial t} \det D\Phi(a,t) + \frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \det D\Phi(a,t)$$

$$+ \; c \frac{\partial}{\partial t} \det (D\Phi(a,t))$$

koti tehtävän perusteella: $\frac{\partial}{\partial t} \det (D\Phi(a,t)) = \det(D\Phi) \operatorname{tr}\left(\frac{\partial D\Phi}{\partial t} D\Phi^{-1}\right)$

koska $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = u$ ja riittävän säännöllisyyden vallitessa

$$\frac{\partial D\Phi}{\partial t} = D\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$ saadaan

$$\frac{\partial}{\partial t} \det (D\Phi(a,t)) = \det(D\Phi) \operatorname{tr}\left(D_a u \, D\Phi^{-1}\right)$$

edelleen tehtävän 3 nojalla

$$D_a u D\Phi^{-1} = D_x u \;, \quad \text{joten}$$

$$= \det(D\Phi) \operatorname{tr}\left(D_x u(\Phi(a,t),t)\right)$$

Yhdistetään lohkot:

$$\frac{d}{dt} K(t) = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + c \operatorname{tr}(D_x u)\right) \det(D\Phi)\, da$$

$$= \int_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + c \operatorname{tr}(D_x u) \; dx.$$

tulkitaan, mitä ylläolevat termit ovat:

$$\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = c_{,i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = c_{,i}\,u_i = u\cdot\nabla c$$

$$\operatorname{tr}(D_x u) = \operatorname{tr}\left(u_{i,j}\right) = u_{i,i} = \operatorname{div} u$$

siis

$$\frac{d}{dt}K(t) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t} + u\cdot\nabla c + c\operatorname{div} u \; dx.$$

edelleen $\quad u\cdot\nabla c + c\operatorname{div} u = \operatorname{div}(cu)$

$$= \int_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(cu).$$

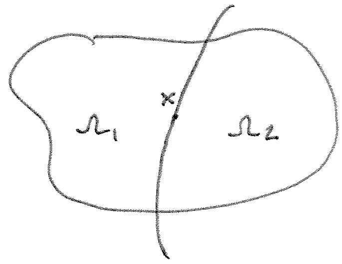
a.

Mallit / kierros 2.

OSOITA, ETTÄ $T(x,n) = \sigma(x)\cdot n$.

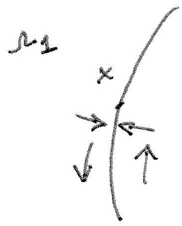
HIEMAN TAUSTAA:

$T(x,n)$:llä tarkoitetaan pisteessä x vaikuttavaa "pintavoimaa". Tarkastellaan kappaletta Ω:



$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

kappaleen sisällä Ω_1 vaikuttaa Ω_2:



traktio T kuvaa "pintavoimaa" (tiheyttä.)

koska Ω on tasapainossa:

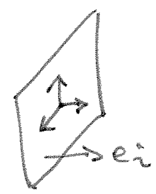
$$T(x,n) = -T(x,-n).$$

MUTTA MILLAINEN ON $T(x,n)$?

jos tarkastellaan koord. Akselien suunt. Rajapintoja voidaan kirjoittaa

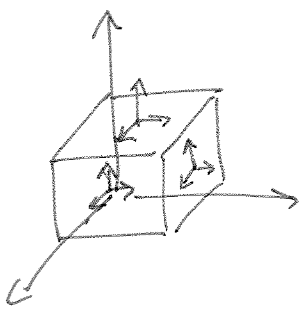
$$T_i(x, e_i) = \sigma_{ji}(x)\, e_j$$

eli



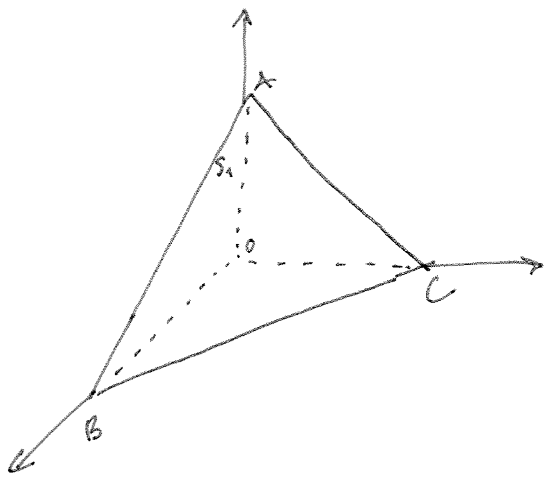
T:llä 3-komponenttia Rajapinnassa (e_i = normaali)

σ voi ajatella differentiaalisena kuutiona, johon voimat kohdistuvat



Päätellään nyt, että $T(x,n) = T(x)\cdot n$:

Tarkastellaan tetraedriä OABC, jossa O on origo (kaikki pisteet voidaan siirtää origoon.) ja tason ABC -normaali on $\vec{n}$:



Merkitään tetraedrin sivuja

$S_4 = ABC$, normaali $\vec{n}$

$S_3 = OAC$, normaali, $-\vec{e}_x = -\vec{e}_1$

$S_2 = OBC$ $\quad -\vec{e}_z = -\vec{e}_3$

$S_1 = OBA$ $\quad -e_y = -\vec{e}_2$

olkoot tetraedrin korkeus h. Tarkastellaan voimia.

koska ollaan voimat asapainossa:

$$\sum_{i=1}^{4} \int_{S_i} T(x,n_i)\,dx = \int_V f(x)\,dx$$

til. voima.

koska T on jatkuva x-suhteen voidaan osoittaa, että

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{ala(S_i)} \int_{S_i} T(x,n_i)\,dx \to T(0,n_i)$$

pinnan i-normaali

raja-arvo: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.e. $|x| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{ala(S_i)} \int_{S_i} T(x,n_i) - T(0,n_i) \right| < \varepsilon .$$

tod:

Valitse ε :

$$\left| \frac{1}{ala(S_i)} \int_{S_i} T(x,n_i) - T(0,n_i) \right| \leq \frac{1}{ala(S_i)} \int_{S_i} \left| T(x,n_i - T(0,n_i) \right|$$

koska T on jatkuva voidaan ottaa $\delta > 0$ s.e.

$$|T(x, n_i) - T(0, n_i)| < \varepsilon \quad , |x| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad \leq \quad \frac{1}{ala(S_i)} \int_{S_i} \varepsilon \, dx = \varepsilon \quad \square$$

tilavuudelle saadaan $\frac{1}{ala(S_i)} \int_V f(x) \to 0.$

joten tilavuusvoima voidaan unohtaa. Huomataan vielä, että

$$A(S_i) = (n \cdot e_i) A(S_4)$$

joten

$$\sum \frac{A(S_i)}{A(S_i)} \int T(x, n_i) = 0$$

$$\sum \frac{(n \cdot e_i) \cancel{A(S_4)}}{A(S_i)} \int T(x, n_i) = 0$$

kun $h \to$

$$T(0, \vec{n}) = (n \cdot e_i) T(0, +\vec{e}_i)$$

Joten $\underline{\underline{T(0, \vec{n}) = \sigma \cdot n}}$

3. Liikemäärä säilyy

$$\vec{L}(t) = \int_{\Omega_t} \vec{v}\rho \, dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{L}(t)\right)_i = \int_{\Omega_t} \frac{\partial(v\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(u_i v\rho)$$

$$= \int_{\Omega_t} \dot{u}_i \rho + \dot{\rho} u_i + \nabla u_i \cdot v\rho + \operatorname{div}(v\rho)\, u_i$$

$$= \int_{\Omega_t} \dot{u}_i \rho + \nabla u_i \cdot v\rho + u_i \underbrace{\left(\dot{\rho} + \operatorname{div}(v\rho)\right)}_{=0}$$

Massa säilyy.

$$= \int_{\Omega_t} \dot{u}_i \rho + \nabla u_i \cdot v\rho$$

$$= \int_{\Omega_t} \rho(\dot{u}_i + v \cdot \nabla u_i) = \int_{\Omega_t} \rho \gamma_i$$

$$= \int_{\Omega_t} \sigma_{ij,j}$$

$$= \int_{\partial\Omega_t} \sigma_{ij} \cdot n$$

ei ulk. voimia

$$= 0$$

7.

Cauchyn venymätensori määritelltiin:

$$C = F^T F \quad \text{jossa} \quad F = \nabla \Phi$$

selvästi $C^T = F^T F = C$ $\square$

oletuksen mukaan $\det(\nabla \Phi) \neq 0$, eli

$$(\nabla \Phi)\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$$

näin ollen

$$x^T F^T F x = (\nabla \Phi x)^T (\nabla \Phi x)$$

$$= \|\nabla \Phi x\|_2^2$$

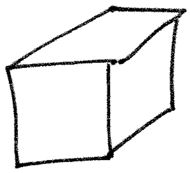
oletuksen mukaan $\|\nabla \Phi x\|_2^2 = 0$, vain jos $x = 0$.

$\Rightarrow C$ on pos. def.

5.

materiaalin vaikuttaa vain paine p. Miten σ?

2-tehtävässä σ – ajatellaan kuution "pinta-voimien" kautta:



paine aiheuttaa kullekin sivulle normaalin suuntaisen voiman, eli $F = pA\vec{n}$. σ on pinta-voiman tiheys,

joten $\sigma = \begin{bmatrix} p & & 0 \\ & p & \\ 0 & & p \end{bmatrix} = pI$.

Edelleen $\operatorname{div}\sigma = \sigma_{ij,j} = \nabla p$.

Näin ollen liikeyhtälöksi tulee

$$\rho\gamma = \nabla p.$$

Massan säilymislaki: $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

Saadaan systeemi:
$$\begin{cases} \rho\gamma = \nabla p \quad / \quad \rho \frac{Du}{Dt} = \nabla p \\ \dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \end{cases}$$

tehdään oletus, että fluidi on tasapainotilan lähellä, eli:

$p = p_0 + p'$ $\quad$ p' pientä

$\rho = \rho_0 + \rho'$ $\quad$ ρ' pientä

u $\quad$ pientä

∇u $\quad$ pientä.

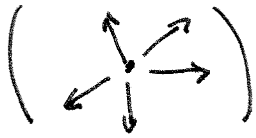
Lisäksi käytetään ρ ja p:lle materiaalilakia $p = C\rho$

(Voi ajatella $pV = nRT$, $p = \rho \underbrace{MRT}_{C} \Rightarrow p = C\rho$)

Näillä oletuksilla

$$\frac{Du}{Dt} \to \dot{u} \qquad \mathrm{div}(\rho u) \to \rho_0 \,\mathrm{div}\, u$$

$$\nabla p \to c \nabla \rho$$



$$\rho \dot{u} \to \rho_0 \dot{u}$$

eli saadaan

$$\rho_0 \dot{u} = \nabla p \overset{}{=} c\nabla\rho \qquad (1)$$

$$\rho' + \rho_0 \,\mathrm{div}\, u = 0 \qquad (2)$$

otetaan (1) divergenssi ja (2) spat. aikaderivaatta

$$\begin{cases} \rho_0 \nabla \cdot \dot{u} = \nabla \cdot (c \nabla \rho) \\ \rho'' + \mathrm{div}(\dot{u} \rho_0) = 0 \end{cases}$$

ns. acoustic equations.

$\Rightarrow \rho'' - c \Delta \rho = 0$ joka on aaltoyhtälö ρ:lle.