1. Trigonometriset ja hyperboliset funktiot

Reaaliset sin ja cos voidaan palauttaa eksponenttifunktioon *Eulerin kaavan* avulla: Jos x on **reaaliluku**, niin

$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

Jos nämä lasketaan yhteen ja vähennetään, saadaan heti ratkaistuksi:

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

Nämä kaavat ovat sinänsä hyödyllisiä monessa kohdassa matematiikan kentillä. Aktivoi niiden käyttö!

Tässä käytämme niitä antamaan johtolangan siihen, miten kompleksiargumentin sin $-$ ja cos $-$funktiot tulisi määritellä.

Olemme palauttaneet reaalisen sinin ja kosinin kompleksimuuttujan exp-funktioon. Helppo tapa on määritellä kompleksiset sini ja kosini yksinkertaiseti samoilla kaavoilla, siis antamalla x:n tarkoittaa mielivaltaista kompleksilukua (jolloin merkitsemme sitä mieluummin z:lla). Tällöin ainakin saamme vastaavien reaalialueen funktioiden laajennuksen, koskapa tuo kaava siellä pätee.

Toivottavaa tietysti on, että mahdollisimman paljon sinin ja kosinin tunnetuista ominaisuuksista säilyisi.

Määritelmä 1.1. Olkoon $z \in \mathbb{C}$ Asetamme:

$$\begin{cases} \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \end{cases} \tag{1.1}$$

Tuttuja ominaisuuksia

Eulerin kaava pätee nyt yleisessä muodossa, koska määritelmä siten asetettiin.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Yhteen- ja vähennyslaskukaavat:

$$\begin{cases} \sin(z_1 \pm z_2) = \sin\, z_1 \,\cos\, z_2 \pm \cos\, z_1 \,\sin\, z_2 \\ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos\, z_1 \,\cos\, z_2 \mp \sin\, z_1 \,\sin\, z_2. \end{cases}$$

Sini toiseen plus kosini toiseen-kaava:

$$\cos^2\, z + \sin^2\, z = 1$$

Nämä ovat rutiinilaskuja suoraan määritelmistä, joitain voidaan ottaa harjoitustehtäviksi.

Uusia ominaisuuksia

Katsotaan nyt sellaisia, joille ei ole vastinetta “reaalimaalissa”:

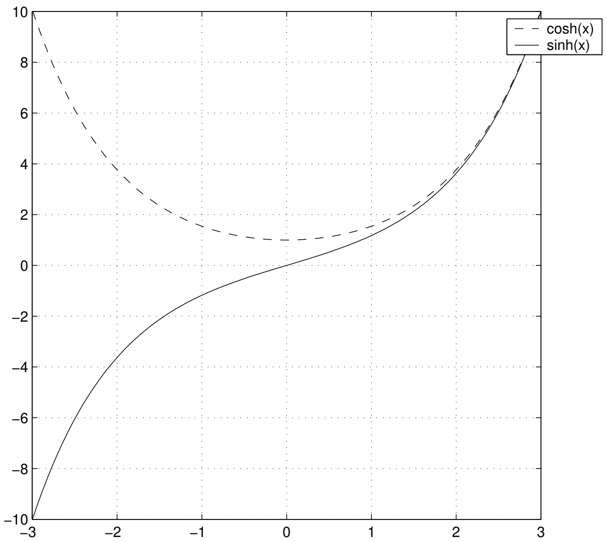
Lause 1.1. *Sinin ja kosinin reaali- ja imaginaariosat ja itseisarvot saadaan kaavoilla:*

$$\begin{cases} \cos\, z = \cos\, x \cosh\, y - i \sin\, x \sinh\, y \\ \sin\, z = \sin\, x \cosh\, y + i \cos\, x \sinh\, y \\ |\cos\, z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \\ |\sin\, z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y. \end{cases}$$

Tod. Lasketaan ...

□

Näistä kaavoista näkyy aivan uusia, ennen näkemättömiä piirteitä vanhoissa tuttavissamme, sinissä ja kosinissa. Palautetaan mieleen reaalisten hyperbolisten funktioiden kuvaajat.



Näemme kahdesta jälkimmäisestä yhtälöstä, että cos − ja sin − funktiot **eivät ole** enää edes **rajoitettuja**, puhumattakaan, että niiden itseisarvot olisivat korkeintaan 1. Edellisistä taas näkyy, että kun imaginaariosa y kasvaa, niin näiden funktioiden sekä reaaliosa että imaginaariosa lähestyvät ±ääretöntä (ellei x ole sinin tai kosinin nollakohta).

Palaamme näihin ominaisuuksiin, kun visualisoimme sin − ja cos − kuvauksia.

Trigonometristen ja hyperbolisten funktioiden välinen yhteys

Reaalialueella samankaltaiset ominaisuudet trigonometristen ja hyperbolisten funktioiden välillä näyttäytyvät lähinnä mystisenä kuriositeettina. Kompleksialue paljastaa, mitä tämän "mysteerin" taakse kätkeytyy.

Palautetaan vielä mieleen määritelmät.

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{i\,z} + e^{-i\,z}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{i\,z} - e^{-i\,z}).$$

Hyperboliset ovat muuten samoja, mutta i korvataan joka paikassa 1 :llä. Niinpä

$$\begin{cases} \cosh\, i\, z = \cos\, z & \sinh\, i\, z = i\, \sin\, z \\ \cos\, i\, z = \cosh\, z & \sin\, i\, z = i\, \sinh\, z \end{cases}$$

(Jälkimmäiset seuraavat edellisistä myös suoraan, koska kompleksialueellakin pätee sinin parittomuus ja kosinin parillisuus: $\sin(-z) = -\sin\, z$, $\cos(-z) = \cos\, z$.)

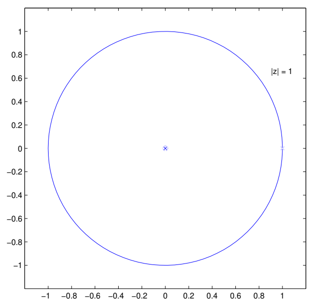
[KRE] [12.7 ss. 682–687]

2. Kompleksitason topolgiaa

Jotta voisimme käsitellä raja-arvoja ja derivoimista, kertaamme aluksi 2-kurssien asioita tason joukkojen geometrisista ominaisuuksista. Kompleksiluvut eivät tuo tähän notaation lisäksi mitään uutta.

2.1. **Ympyrät, kiekot, puolitasot. Merkintöjä**

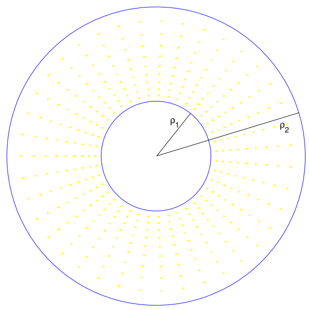
Yksikköympyrä: $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$



Avoin yksikkökiekko: $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,
suljettu yksikkökiekko: $B_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

Yleisemmin: c-keskinen, ρ-säteinen suljettu kiekko: $B_\rho(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq \rho\}$
Vastaava avoin: $U_\rho(c)\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < \rho\}$

Rengasalue (”annulus”): $\{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z - c| < \rho_2\}$ (avoin)



2.2. **Avoin, suljettu, yhtenäinen joukko, alue.** Olemme käyttäneet termejä ”avoin”ja ”suljettu”. Miten ne määritellään yleiselle tason pistejoukolle?

Miten yleistetään ajatus avoimesta välistä tai avoimesta kiekosta? Olennainen idea (derivoinnin kannalta elinehto) on, että jos valitaan joukosta mikä tahansa piste z, niin z :n ja joukon ”reunan”väliin mahtuu kokonainen (joskin ehkä pienen pieni) kiekkonen.

Muodollisesti:

Määritelmä 2.1. Joukko $S \subset \mathbb{C}$ on *avoin*, jos $\forall z \in S \;\; \exists U_\rho(z) \subset S$.

Määritelmä 2.2. Joukko $S \subset \mathbb{C}$ on *yhtenäinen*, jos sen mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla, joka kokonaan sisältyy joukkoon S.
Joukko S on *alue*, jos se on avoin ja yhtenäinen.

Huomautus 2.1. Alue on kompleksianalyysin kannalta tärkein joukkotyyppi. Sitä voidaan pitää analyyttisen funktion ”kotijoukkona”.

Huomautus 2.2. Englannin kielessä käytetään termejä ”domain”tai ”region”. Kompleksianalyysissä näyttää ”domain”tulleen suositummaksi siitä huolimatta, että sama sana tarkoittaa myös yleisesti funktion määrittelyjoukkoa, olipa tämä joukko minkälainen tahansa. [KRE]-kirja käyttää ”domainia”, asiayhteyden perusteella on helppo pysyä kärryillä.

Määritelmä 2.3. Joukko S on *suljettu*, jos sen komplementti $\mathbb{C}\backslash S$ on avoin. Joukon S *Reunapiste* on sellainen, jonka jokaisessa ympäristössä [1] on sekä joukon S että sen komplementin pisteitä.

Suljettu joukko on sellainen, joka sisältää kaikki reunapisteet. Avoin taas on sellainen, joka ei sisällä yhtään reunapistettä. (Nämä voitaisiin antaa harjoitustehtäväksi, mutta emme uppoudu topologisten asioiden yksityiskohtiin tällä kertaa.)

Huomaa, että joukko ei yleensä ole avoin eikä suljettu. Ota mikä tahansa joukko, jolla osa reunasta kuuluu joukkoon ja osa taas ei.

Nyrkkisääntö:
1. Jos joukko määritellään epäyhtälöillä, jotka kaikki ovat aitoja ($<, \;\; >$), on kyseessä avoin joukko.
2. Jos kaikki määrittelevät epäyhtälöt ovat ”epäaitoja”($\leq, \;\; \geq$), on kyseessä suljettu joukko.
3. Jos osa on aitoja ja osa ”epäaitoja”, ei joukko ole avoin eikä suljettu.

Tyyppiesimerkkejä.

- ”Avoin”kiekko on avoin, ”suljettu”kiekko on suljettu, samoin ympyräviiva.
- Suorakulmio: $a < x < b, c < y < d$ on avoin, jos $<$ korvataan $\leq$:lla, saadaan reuna mukaan ja joukko siis on suljettu.
- Puolitaso, kuten $\operatorname{Im} z > 0$ on avoin, $\geq$ tekee sen suljetuksi.

Kaikki yllä olevat ovat yhtenäisiä, samoin on rengasalue $\rho_1 < |z| < \rho_2$.

Esimerkki epäyhtenäisestä avoimesta joukosta on suljetun rengasalueen komplementti:
$\mathbb{C}\backslash\{z \,|\, \rho_1 \leq |z| \leq \rho_2\}$.
Kenties vielä havainnollisempi: *joukko saaria meressä*, sanokaamme
Suomenlinna $\cup$ *Pihlajasaari* $\cup$ *Melkki*.

[1] Pisteen z ympäristöllä tarkoitetaan z-keskistä kiekkoa.

3. Kompleksifunktio, raja-arvo, jatkuvuus

Kompleksifunktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on sama kuin $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Kakkoskursseilla on käsitelty näiden differentiaalilaskentaa. Jos $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, niin koordinaattifunktiot u ja v ovat kahden muuttujan reaaliarvoisia funktioita. Niiden osittaisderivaattoja voidaan tutkia, niistä voidaan muodostaa gradienttivektorit. Kun nämä sijoitetaan matriisin sarakkeiksi, saadaan *Jacobin matriisi*, jota voidaan kutsua funktion f derivaataksi edellyttäen, että f on niin sanotusti differentioituva. Tälle riittävä ehto on osittaisderivaattojen jatkuvuus.

Kun otamme $\mathbb{R}^2$:ssa kompleksikertolaskun mukaan peliin, pääsemme paljon pitemmälle ja monin tavoin myös paljon helpommin. Tämä johtuu siitä, että nyt voimme muodostaa erotusosamäärän, kuten yhden muuttujan funktioilla. Niinpä osa teoriasta saadaankin aivan ilmaiseksi kopioimalla suoraan yhden muuttujan differentiaalilaskennan todistuksia (x korvataan z:lla).

Mielenkiintoiseksi tarina muuttuu sitten, kun molemmat teoriat sekoittuvat keskenään.

3.1. Kompleksifunktio ja sen kuvaaminen.

3.1. Kompleksifunktio ja sen kuvaaminen. Muistutetaan vielä, mitä *funktio* yleisesti tarkoittaa. *Funktio* $f : S \to \mathbb{C}$ on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon S alkioon yksikäsitteisen kohdejoukon (tässä $\mathbb{C}$:n) alkion.

Funktio voi siten olla ”toimintaohje”: ”korota syöte toiseen”, ”laske syötteen imaginaariosa”tai ”toteuta laskenta-algoritmi”(tietokoneohjelma), kun syötteenä on annettu luku z.

Palautetaan mieliin: *määrittelyjoukko (domain), arvojoukko (range), injektio (one-to-one), surjektio (onto), bijektio (kumpaakin).*

Esimerkki 3.1. Olkoon $f : S \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, missä $S = 0 < |z| < 1$ (”punkteerattu”yksikkökiekko). Arvojoukko $R = |z| > 1$. f on bijektio $S \to R$.

Kuten edellä puhuttiin, funktio $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ voidaan esittää komponenttifunktioiden ($u(x, y)$ ja $v(x, y)$ avulla vektorina.

Kompleksinotaatiota käyttäen näin:

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = x + iy (= (x, y)).$

$f(z) = \underbrace{\mathrm{Re}\ f(z)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\mathrm{Im}\ f(z)}_{v(x,y)}$

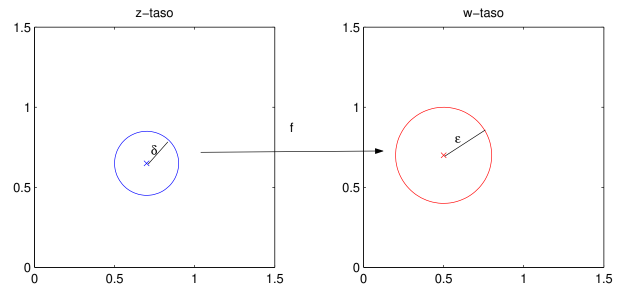
Esimerkki 3.2. $f(z) = z^2 + 3z$, sijoitetaan $z = x + iy$,
$f(z) = (x + iy)^2 + 3(x + iy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 3x + 3iy = \underbrace{x^2 - y^2 + 3x}_{u(x,y)} + i \underbrace{(-2xy + 3y)}_{v(x,y)}$

3.2. Raja-arvo, jatkuvuus. Kyseessä ovat täsmälleen samat tutut käsitteet, jotka esiintyivät 2-kursseilla. Kerrataan lyhyesti:

Kun puhutaan raja-arvosta pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$, oletetaan, että funktio f on määritelty jossain z_0 :n ympäristössä, mutta ei välttämättä z_0 :ssa. (Olipa f määritelty z_0 :ssa tai ei, sillä ei ole mitään vaikustusta raja-arvoon.)

$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ tarkoittaa:

$|f(z) - L|$ saadaan niin pieneksi kuin halutaan, tuomalla z riittävän lähelle z_0 :aa, ts.tekemällä $|z - z_0|$ riittävän pieneksi.



Muodollisesti:

Määritelmä 3.1. $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ tarkoittaa:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ siten, että $|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - L| < \epsilon$.

Lause 3.1. *(1) Summan, tulon, osamäärän raja-arvosäännöt ovat samat kuin reaalifunktiolle. (2) Raja-arvo voidaan palauttaa kahteen reaalifunktion raja-arvoon:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \iff \begin{cases} lim_{z \to z_0} \mathrm{Re}\ f(z) = \mathrm{Re}\ L \\ lim_{z \to z_0} \mathrm{Im}\ f(z) = \mathrm{Im}\ L \end{cases}$$

Todistus. Kohta (1) on vanha tuttu 1-kurssilta.
Kohta (2) : Olkoon $f = u + iv$ ja $L = L_1 + iL_2$.

$f(z) - L = u(z) + iv(z) - L_1 - iL_2$, joten $|f(z) - L|^2 = |u(z) - L_1|^2 + |v(z) - L_2|^2$.

Tästä nähdään heti väite molempiin suuntiin.

□

Huomautus 3.1. Vaikka osa raja-arvolauseista menee sanasta sanaan reaalilukutilanteen mukaan, tulee $\mathbb{R}^2$:ssa uutena asiana se, että ympäristöt ovat kiekkoja eivätkä välejä. Tästä seuraa, että raja-arvon edellytyksenä on, että lähestyttiinpä rajapistettä mitä polkua pitkin tahansa, niin aina on tultava sama ”polkuraja-arvo”. Tämähän on tuttua 2-kurssilta, kohta siihen taas törmätään massiivisesti.

Jatkuvuus

Määritelmä 3.2. f on *jatkuva* pisteessä z_0, jos f on määritelty jossain z_0 : n ympäristössä (erityisesti pisteessä z_0) ja $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$.

Toisin sanoen f on jatkuva z_0 :ssa, jos

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ siten, että $|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Jatkuvien funktioiden peruslauseet seuraavat raja-arvojen peruslauseesta.

Tämän kertauskoosteen jälkeen siirrytään uuteen maailmaan, $\mathbb{C}-$ maailmaan.

4. Derivaatta, analyyttinen funktio

Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue (siis avoin ja yhtenäinen). Tarkastellaan funktiota $f : D \to \mathbb{C}$. Olkoon $z_0 \in D$. Koska D on avoin, niin $z_0 + h \in D$, kun h on itseisarvoltaan tarpeeksi pieni kompleksiluku. Tällöin siis $f(z_0 + h)$ on määritelty. Tätä litaniaa emme toista, kun puhumme $z_0 + h$:sta tms., niin oletamme aina, että $|h|$ on tässä mielessä riittävän pieni. (Alkuvaiheessa emme tarvisisi yhtenäisyyttäkään, pelkkä "avoin"riittäisi, mutta olkoon alusta alkaen yhtenäisyyskin mukana.)

Aluksi kaikki näyttää siltä, kuin olisimme tutussa $\mathbb{R}-$ maailmassa.

Määritelmä 4.1 (Derivaatta)**.** Funktio $f : D \to \mathbb{C}$ (D alue) on derivoituva pisteessä $z_0 \in D$, jos on olemassa erotusosamäärän raja-arvo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Määritelmä 4.2 (Analyyttisyys)**.** Olkoon f kuten edellä.
Jos f on derivoituva kaikissa pisteissä $z_0 \in D$, niin f on *analyyttinen* joukossa D.

Jos f on analyyttinen jossain pisteen z_0 ympäristössä, sanotaan, että f on analyyttinen pisteessä z_0.

Huomautus 4.1. Analyyttinen ja derivoituva ovat synonyymejä puhuttaessa alueesta D. Sensijaan derivaatan olemassaolo pelkästään pisteessä z_0 ei oikeuta nimitykseen *analyyttinen pisteessä* z_0, vaan tähän vaaditaan derivoituvuus jossain kokonaisessa z_0 :n ympäristössä.

Perusesimerkit ja -lauseet, $\mathbb{R}$-teorian kaltaiset. Kun reaalifunktiotodistuksissa korvataan x z:lla, saadaan joukko yleisiä ominaisuuksia aivan ilmaiseksi. Näytetään esimerkin vuoksi potenssifunktion derivoituvuus ja derivointikaava.

Esimerkki 4.1. $f(z) = z^n$. Tarkastellaan derivoituvuutta pisteessä z_0 ja merk. $z = z_0 + h$, missä "lisäysvektori" h on tietysti myös kompleksiluku. Muodostetaan erotusosamäärä

$$e(z_0, h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Käytetään tuttua kaavaa:

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \ldots + z\, z_0^{n-2} + z_0^{n-1}).$$

Siis $e(z_0, h) = z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \ldots + z\, z_0^{n-2} + z_0^{n-1} \to \underbrace{z_0^{n-1} + z_0^{n-1} + \ldots + z_0^{n-1}}_{n \ \text{kpl}}$, kun $h \to 0$ (eli $z \to z_0$). Tässä käytettiin tulon ja summan raja-arvosääntöjä, jotka todistetaan täsmälleen samalla tavalla kuin reaalitapauksessa, kuten edellä huomautettiin.

Osoitimme siis, että potenssifunktio z^n on derivoituva koko kompleksitasossa ja tuttu derivoimiskaava

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$$

on voimassa. Tässä osoitimme sen positiivisille eksponenteille $n \in \mathbb{N}$. Se yleistyy osamäärän derivoimiskaavan avulla negatiivisille tuttuun tyyliin. Viime mainittu on yhtenä kohtana seuraavaa lausetta.

Miltei sanasta sanaan samoin kuin reaalitapauksessa saadaan todistetuksi:

Lause 4.1. *Pisteessä z_0 derivoituvien funktioiden summa, erotus ja tulo ovat derivoituvia pisteessä z_0, osamäärä samoin, mikäli z_0 ei ole nimittäjän nollakohta. Tutut derivoimiskaavat ovat voimassa.*
Jos f on derivoituva pisteessä z_0 ja g on derivoituva pisteessä $f(z_0)$, niin yhdistetty funktio $F = g \circ f$ on derivoituva pisteessä z_0 ja $F'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$ Toisin sanoen ketjusääntö *pätee.*
Potenssifunktion z^n tuttu derivoimiskaava on voimassa, kun n on kokonaisluku. Se pätee myös rationaaliluvuille, erityisesti siis juurifunktioille.

Tod. Osa todistuksesta tehtiin edellä ja osasta selvittiin vetoamalla reaalitapauksen samanlaisuuteen. Katsotaan lähemmin viimeistä väitettä juurifunktioista. Konkreettisuuden maksimoimiseksi rajoitutaan neliöjuureen.

Neliöjuurelle täytyy valita haara (niinhän on reaalialueellakin). Olkoon $f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\,\varphi/2}$, missä $\varphi = Arg\, z$ (argumentin päähaara). (Toinen haara on $-f(z)$.) Neliöjuuren haara $f(z)$ on koko kompleksitasossa jatkuva, paitsi negatiivisella reaaliakselilla. Esim. $\sqrt{-1} = i$, mutta jos mennään yksikköympyrän kehää pitkin hiukan alaspäin, jolloin φ on hiukan suurempi kuin $-\pi$, eli z on hiukkasen (vaikka kuinka vähän) negatiivisen reaaliakselin alapuolella, niin $\sqrt{z}$:n argumentti on lähellä $\frac{-\pi}{2}$:ta ja siis tämän neliöjuuren haaran arvot poikkeavat toisistaan paljon (erotuksen itseisarvo on melkein 2).

Tästä syystä neliöjuuren haaraa ei voida jatkuvuus/derivoituvuustarkastelussa määritellä koko kompleksitasossa, vaan tasosta on poistettava negatiivinen reaaliakseli. Sanonta: "Taso leikataan auki pitkin negatiivista reaaliakselia". Näin saadaan avoin joukko, ja jokaisella pisteellä on ympäristö, jossa ei ole negatiivisen Re-akselin pisteitä, eikä siis argumentin epäjatkuvuuskohtaa.

Sama rajoitus toimii yhtä hyvin $\sqrt[n]{z}$:n tapauksessa, joka on n- haarainen funktio. Samaan menettelyyn palaamme logaritmin yhteydessä, tällöin kyseessä on "äärettömän monihaarainen"funktio. (Oikeammin pitäisi sanoa, että kukin haara on funktio, mutta vältämme liian pedanttista puhetapaa.)

Itse todistus on varsin helppo ja lyhyt. Alueemme D olkoon siis kompleksitaso, josta on poistettu negatiivinen reaaliakseli.

Merkitään $w = \sqrt{z}$, jolloin siis $z = w^2$. Erotusosamäärä $\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z} = \frac{1}{\frac{\Delta\, z}{\Delta\, w}}$.

Kun $\Delta\, z \to 0$, niin $\Delta\, w \to 0$, **koska funktiomme on jatkuva**.

Siis $\lim_{\Delta\, z \to 0} \frac{\Delta\, w}{\Delta\, z} = \frac{1}{\frac{d\,z}{d\,w}} = \frac{1}{2\,w} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

Huomaa: Tässähän on yleinen menettely käänteisfunktion derivaatan johtamiseen, joka on tuttu jo $\mathbb{R}-$laskennasta. Uutena piirteenä tuli tuo jatkuvuudesta huolehtiminen. □

Huomautus 4.2. Analyyttisyys määritellään derivoituvuutena, siten kaikkialla edellisessä lauseessa voidaan "derivoituvan" sijasta sanoa "analyyttinen".

Esimerkin ja lauseen avulla saadaan heti koko joukko analyyttisia funktioita:

Lause 4.2. *Polynomit ovat analyyttisia koko tasossa* $\mathbb{C}$.
Rationaalifunktiot ovat analyyttisia alueessa $\mathbb{C}\setminus\{$*nimittäjän nollakohdat*$\}$
Juurifunktiot $\sqrt[n]{z}$ *(tarkemmin sanottuna niiden haarat) ovat analyyttisiä alueessa, joka saadaan poistamalla tasosta negatiivinen reaaliakseli.*

4.1. **Esimerkkejä ei-derivoituvista funktioista.** Käytetään hyväksi sitä, että eri polkuja pitkin on saatava sama raja-arvo, jotta voisi olla toiveita dervoituvuudesta.

Esimerkki 4.2. $f(z) = \overline{z}$.

$\mathrm{eros}(z,h) = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$.

1) Jos lähestytään pitkin x-akselin suuntaista suoraa, ts. $h \in \mathbb{R}$, niin $\overline{h} = h$, joten $\mathrm{eros}(z,h) = 1$, joten myös raja-arvo $x-$akselin suunnassa on 1.

2) Jos lähestytään $y-$akselin suuntaisesti, niin $h = ih_y$, joten $\overline{h} = -ih_y$ ja siis osamäärä on vakio -1.

$\mathrm{eros}(z,h)$ saa siis mielivaltaisessa $z:$ n ympäristössä sekä arvon 1 että -1, joten raja-arvoa, kun $h \to 0$ ei ole.

Katsotaanpa tätä $\mathbb{R}^2-$ teorian näkökulmalta:

$f(z) = \overline{z} = x - iy$, eli $f = u + iv$, missä $u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y$.

Koordinaattifunktioilla u ja v on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat, silti f ei ole derivoituva funktiona: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Tyypillisiä analyyttisiä funktioita:

- polynomit,
- rationaalifunktiot
- yleisesti funktiot, jotka "voidaan lausua muuttujan z avulla" (Tämä on epätarkka ilmaus, sarjojen avulla tarkemmin, mutta ei tässä kurssissa.)

Tyypillisiä ei-analyyttisiä funktioita:

- $f(z) = \overline{z} = x - iy$
- $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $f(z) = \mathrm{Re}\ z = x, f(z) = \mathrm{Im}\ z = y$
- yleisesti funktiot, joissa esiintyy x tai y tai $\overline{z}$, siis sellaiset, joita ei voi lausua pelkän z:n avulla.

5. Cauhy–Riemannin yhtälöt

[KRE] 12.4, s. 669 ...

Tähän mennessä olemme käsitelleet analyyttisiä funktioita erotusosamäärä- määritelmään perustuen ja saaneet osoitetuksi joukon funktiota, kuten polynomit ja yleisemmin rationaalifunktiot (määrittelyjoukossaan) analyyttisiksi puhtaasti $\mathbb{R}-$ tekniikkaa matkimalla.

Olemme myös nähneet, että hyvin tavalliset funktiot voivat olla koko tasossa ei-derivoituvia. (Yritäpä konstruoida reaaliakselin välillä jatkuva reaalifunktio, joka ei ole derivoituva missään, siihen tarvitaan *Weierstrassin* kykyjä.)

Pyrimme nyt kehittämään analyyttisyyskriteerin, joka on esitettävissä reaalifunktioiden $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ avulla.

Tiedämme, että välttämätöntä on, että eros-raja-arvot pitkin $x-$ ja $y-$ suuntia yhtyvät. Siitä päästään koordinaattifunktioiden osittaisderivaattoja koskevaa ehtoon, joka tunnetaan *Cauhcy–Riemannin* yhtälöinä.

Olkoon siis $f = u + iv$ funktio, joka on määritelty pisteen $z = x + iy$ ympäristössä.

Oletetaan, että f on kompleksifunktiona derivoituva pisteessä $z = x + i\,y$.

Muodostetaan erotusosamäärä:

$$e(z, \Delta z) = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(z + \Delta z) - u(z)}{\Delta z} + i\,\frac{v(z + \Delta z) - v(z)}{\Delta z}.$$

Oletuksemme mukaan erotusosamäärällä on kompleksitasossa raja-arvo $f'(z)$, joten sillä on erityisesti raja-arvo lähestyttäessä koordinaattiakselien suuntaan, ja kumpikin raja-arvo yhtyy $= f'(z)$.

(1) Muodostetaan ensin erotusosamäärä $x-$ akselin suunnassa, ts. $\Delta z = \Delta x$.

$$e(z, \Delta x) = \frac{u(z + \Delta x) - u(z)}{\Delta x} + i\,\frac{v(z + \Delta x) - v(z)}{\Delta x}$$

Koska raja-arvo on, niin reaaliosalla ja imaginaariosalla on raja-arvot. Toisaalta nämä ovat tasan tarkkaan osittaisderivaatat $u_x(z)$ ja $v_x(z)$. [2] Siispä osittaisderivaatat x :n suhteen ovat olemassa ja pätee: $f'(z) = u_x(z) + i\,v_x(z)$.

(2) Muodostetaan toiseksi erotusosamäärä $y-$ akselin suunnassa, ts. $\Delta z = i\,\Delta y$. Rutiinisievennys (teepä se, jotta rutiini säilyy ja kehittyy) antaa:

$$e(z, i\,\Delta y) = \frac{v(z + i\,\Delta y) - v(z)}{\Delta y} - i\,\frac{u(z + i\,\Delta y) - u(z)}{\Delta y}.$$

Samoin kuin edellä, johdutaan nyt yhtälöön $f'(z) = v_y(z) - i\,u_y(z)$.

Siis osittaisderivaatat $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ovat olemassa, ja

$u_x(z) + i\,v_x(z) = f'(z) = v_y(z) - i\,u_y(z)$.

Reaaliosien ja imaginaariosien on siten oltava samat, joten

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (5.1)}$$

Tässä nyt komeilevat nuo mainitut *Cauhcy–Riemannin* yhtälöt (lyhyesti CR-yhtälöt).

Esimerkki 5.1. Katsotaan pari tuttua esimerkkiä, joiden tuloksen tiedämme:

(1) $f(z) = z^2$, (2) $f(z) = \overline{z}$.

[2] Ehkä näyttää vielä tutummalta, jos kirjoitat u- ja v-kaavat tyyliin $\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}$, $\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}$.

Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat **välttämätön ehto** derivoituvuudelle. Mikä riemukkainta, ne ovat myös **riittävä ehto**, mikäli **oletamme osittaisderivaatoista** jotain: nimittäin **jatkuvuuden**.

Toisin kuin [KRE]-kirja esittää, tuo ei ole olennaisesti vaikeampi todistaa kuin välttämättömyyskään. Osa todistusta sisältyy siihen 2-kurssilla esitettyyn asiaan, että osittaisderivaattojen jatkuvuudesta seuraa "differentioituvuus" joka puolestaan on se "oikea" lisäehto.

No, emme kuitenkaan malta käyttää tähän nyt aikaa. ([KRE]-kirjassa todistus on myös jätetty väliin, tosin se sisältyy kirjan Appendix 4:ään, mutta hiukan "suttuisessa" muodossa sisältäen tuon mainitun 2-kurssin asian todistuksen.)

Ahlforsin kirjassa [Ahl] (alla) asia on tehty "oikaoppisesti", samoin esim. Nevanlinna–Paatero: Funktioteoria (1960-luvulta).

Näin olemme todistaneet tärkeän lauseen välttämättömyyspuolen sekä selittäneet viittein riittävyyspuolen.

Lause 5.1 (Cauchy–Riemann). *(1) Jos $f = u + iv$ on derivoituva pisteessä $z \in \mathbb{C}$, niin CR-yhtälöt toteutuvat.*

(2) Jos u :lla ja v:llä on jatkuvat osittaisderivaatat ja CR-yhtälöt toteutuvat, niin f on derivoituva pisteessä z.

Jos ehdot ovat voimassa, niin $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$. (Voidaan lausua CR-yhtälöiden avulla muissakin muodoissa, kuten $f'(z) = v_y(x, y) - i\, u_y(x, y)$.

Esimerkkejä CR-yhtälöiden käytöstä. Vastaesimerkkien käsittely mekanisoituu.

Esimerkki 5.2. Katsotaan CR-yhtälöiden valossa alkuesimerkkiämme (4.2 s. 10), $f(z) = \bar{z} = x - i\,y$. Nyt $u = x,\quad v = -y$, joten $u_x = 1$ ja $v_y = -1$. Niinpä 1. CR-yhtälö ei ole voimassa missään, joten funktio ei ole derivoituva missään pisteessä z.

Esimerkki 5.3. $f(z) = z\,\bar{z} = |z|^2$. Nyt $u(x, y) = x^2 + y^2$ ja $v(x, y) = 0$, joten $u_x = v_y \iff 2\,x = 0$. $u_y = -v_x \iff 2\,y = 0$. Siten CR-yhtälöt ovat voimassa vain O :ssa. Näin ollen f on derivoituva vain O :ssa. Siispä meillä on yksinkertainen esimerkki funktiosta, joka on derivoituva vain yhdessä pisteessä ja siten se ei ole analyyttinen missään. (Muista, että analyyttisyys pisteessä tarkoittaa derivoituvuutta jossakin pisteen ympäristössä.)

Esimerkki 5.4. Katsotaan esimerkin vuoksi, miten CR-yhtälöt toimivat tapauksessa, jonka osaamme suoraan laskea muuten. Tiedämme, että polynomit ovat analyyttisiä ja tuttu derivoimiskaava pätee. Harjoitellaan CR-yhtälöiden käyttöä laskemalla helppo lasku vaikeammin. Olkoon $f(z) = z^2 - 3\,z + 1$. Kirjoitetaan muotoon $f = u + i\,v$. $f(x + i\,y) = (x + i\,y)^2 - 3(x + i\,y) + 1 = x^2 - y^2 - 3\,x + 1 + i(2\,x\,y + 3\,y)$ (Laske ja tarkista!) Siis $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3\,x + 1,\;\; v(x, y) = 2\boldsymbol{x}\,y - 3\,y$.

$u_x = 2\,x - 3,\;\; v_y = 2\,x - 3$
$u_y = -2\,y,\;\; v_x = 2\,y$

Siispä CR-yhtälöt ovat voimassa ja koska osittaisderiaavat ovat jatkuvia, sadaan CR-lauseesta uusi todistus tämän nimenomaisen polynomin analyyttisyydelle. Derivaatta saadaan kaavasta: $f'(z) = u_x(x, y) + i\,v_x(x, y) = 2\,x - 3 + i\,2\,y = 2(x + i\,y) - 3 = 2\,z - 3$. Niinpä vain saatiin kuin saatiinkin tuttu tulos. Eipä hullumpaa!

Esimerkki 5.5. Otetaan seuraavaksi hiukan työläämpi tapaus: $f(z) = z^{-2}$.

Aiemmin esitetyn mukaan tiedämme, että f on analyyttinen koko tasossa, josta origo on poistettu ja $f'(z) = -2z^{-3}$. (Osamäärän derivoimiskaavasta.)

Monissa tapauksissa CR-yhtälöiden käyttö johtaa mittaviin derivointi- ja sievennysoperaatioihin, joiden suorittaminen sujuu nopeammin ja luotettavammin symbolikaskentaohjelmalta kuin erehtyväiseltä ihmiseltä. Demonstroimme tätä suorittamalla laskut MAPLE:lla.

```
# Cauchy-Riemannin yhtälöiden harjoittelua
> f:=z->1/z^2:
> F:=evalc(f(x+I*y));
> u:=evalc(Re(F)):v:=evalc(Im(F)):
> u:=numer(u)/factor(denom(u)): v:=numer(v)/factor(denom(v)):
> 'u'=u,'v'=v;

                         2    2
                        x  - y              2 x y
                   u = ----------, v = - ----------
                         2    2 2          2    2 2
                       (x  + y )         (x  + y )

Annettiin Maplen laskea u=Re(f) ja v=Im(f). (Nämä saadaan käsinkin helposti)
Derivointi käsin alkaa olla jo työlästä, Maplelta se käy:
> ux:=simplify(diff(u,x)):vy:=simplify(diff(v,y)): 'ux'=ux,'vy'=vy;

                         2      2                2      2
                   2 x (x  - 3 y )         2 x (x  - 3 y )
            ux = - ---------------, vy = - ---------------
                       2    2 3                2    2 3
                     (x  + y )               (x  + y )

# Siis ux=vy.
> uy:=simplify(diff(u,y)): vx:=simplify(diff(v,x)): 'uy'=uy,'vx'=vx;

                            2    2                2    2
                    2 y (3 x  - y )       2 y (3 x  - y )
             uy = - ---------------, vx = ---------------
                        2    2 3              2    2 3
                      (x  + y )             (x  + y )

# Siis uy=-vx.

# Siis kyseessä on analyyttinen funktio (kun z ei 0). Miten saadaan
# derivaattaa?
> df:=ux+I*vx;

                           2      2               2    2
                     2 x (x  - 3 y )   2 I y (3 x  - y )
             df := - --------------- + -----------------
                         2    2 3          2    2 3
                       (x  + y )         (x  + y )

# Tuosta ei ole helppo nähdä yleistä dervoimiskaavaa. Mutta
# tarkistetaan:
> Df:=diff(f(z),z);

                                          2
                             Df := - ----
                                          3
                                         z
Sijoitetaan derivoimiskaavaan z=x+iy:

> Df:=subs(z=x+I*y,Df);

                                          2
                          Df := - ----------
                                               3
                                  (x + y I)

> Df:=evalc(%);

                   3        2                      2      3
               2 (x  - 3 x y )               2 I (3 x  y - y )
  Df := - -------------------------------  + -------------------------------
             3        2 2       2      3 2    3        2 2       2      3 2
          (x  - 3 x y )  + (3 x  y - y )   (x  - 3 x y )  + (3 x  y - y )

> simplify(Df-df);
                       0

# Samat ovat, joten teoria toimii kauniisti.
```

Symbolilaskentaohjelmat ovat erityisen oivallisia CR-tehtävissä, sillä symbolinen derivointi toimii parhaissa ohjelmissa varsin luotettavasti, ja tällaiset tehtävät on hyvin helppo kirjoittaa, vaikka olisi vain pinnallisesti perehtynyt ohjelman käyttöön.

Cauchy–Riemannin yhtälöt napakoordinaateissa

Kuten on helppo arvata, joissakin tapauksissa on luontevampaa ja helpompaa käsitellä funktiota muodossa $f(z) = u(r,\varphi) + i\,v(r,\varphi)$, missä $z = r\,e^{i\,\varphi}$. Voidaan osoittaa, että CR-lause saa nyt muodon:

Lause 5.2 (CR napakoordinaateissa). *Omatkoot yllä olevan esityksen $u(r,\varphi)$ ja $v(r,\varphi)$ jatkuvat 1. osittaisderivaatat. Funktio f on derivoituva pisteessä $z = r\,e^{i\,\varphi}$, jos ja vain jos*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

Tällöin $f'(z) = e^{-i\,\varphi}(u_r + i\,v_r) = \frac{e^{-i\,\varphi}}{r}(v_\varphi - i\,u_\varphi)$. (Voidaan kehittää kaksi muutakin muotoa CR-yhtälöistä.)

Sivuutamme lauseen todistuksen, mutta otamme sen käyttöön. (Jos kokeissa tätä tarvitaan, se annetaan, ei siis tarvitse muistaa ulkoa.)

Sovellutuksista kaikkein tyypillisin on varmasti logaritmi, sehän on suoraan tässä muodossa: $\ln z = \ln\,r + i\,\varphi$. Siis $u(r,\varphi) = \ln\,r$ ja $v(r,\varphi) = \varphi$. Napakoordinaattimuotoiset CR-yhtälöt toteutuvat vaivatta: $u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\,v_\varphi$, jälkimmäinen CR-yhtälö toteutuu muodossa $0 = 0$. Derivaatan lasku on sopiva pikku harjoitus. Tässä siis jo esimakua seuraavasta aiheesta. (Ainoa puute on, että emme *todistaneet* napakoordinaattimuotoa CR-yhtälöille.)

6. Alkeisfunktioiden analyyttisyys

Olemme todenneet, että *polynomit* ja yleisemmin *rationaalifunktiot* käyttäytyvät derivointiin nähden täsmälleen samoin kuin reaalialueella. Miten sitten on eksponenttifunktion, logaritmin, trigonometristen ja hyperbolisten funktioiden laita? Näiden asioiden selvittämiseen CR-yhtälöt tarjoavat korvaamattoman tärkeän työkalun.

Eksponenttifunktio Olkoon $f(z) = e^z = e^x \cos\,y + i\,e^x\,\sin y$, joten $u(x,y) = e^x \cos\,y$ ja $v(x,y) = e^x\,\sin y$. Derivoidaan:

$$\begin{cases} u_x = e^x \cos\,y, & u_y = -e^x\,\sin y \\ v_x = e^x\,\sin y, & v_y = e^x \cos\,y \end{cases}$$

Siispä $u_x = v_y$ ja $v_x = -u_y$, eli CR-yhtälöt ovat voimassa mielivaltaisessa pisteessä $z = x + i\,y$. Koska osittaisderivaatat ovat jatkuvien funktioiden tuloina jatkuvia, CR-lause soveltuu ja sanoo, että $f(z) = e^z$ on kaikkialla derivoituva eli siis koko tasossa analyyttinen funktio. Tällaista sanotaan *kokonaiseksi funktoksi* ("entire function"). Samainen CR-lause antaa derivaatan lausekkeen:

$f'(z) = u_x + i\,v_x = e^x \cos\,y + i\,e^x\,\sin\,y = e^z$. Siis pätee:

$$\boxed{\frac{d}{dz}e^z = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}}$$

Logaritmi Tämä johtaa samanlaisiin tarkasteluihin kuin neliöjuuri edellä ja todistus ja derivoimiskaavan johto menevät helpoimmin suoraan käänteisfunktion derivoimiskaavalla. CR-yhtälöitä tässä ei siten tarvita. Toisaalta niitä voidaan hyvin käyttääkin joko $xy-$ muodossa tai vielä helpommin napakoordinaattimuodossa, kuten yllä jo todettiin. Kaikkein mekaanisin ja työläin tapa on tuo $xy-$ muoto, se on esitetty [KRE]-kirjassa (eikä sekään ole oikeasti työläs). Tehdään tässä käänteisfunktiotyylillä.

Tarkastellaan logaritmin päähaaraa $w = Ln\, z = \ln\, r + i\,\varphi$, missä $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Aivan vastaavasti kuin neliöjuuren yhteydessä todetaan, että Ln on jatkuva alueessa $D = \mathbb{C}\backslash$negatiivinen reaaliakseli. (Kompleksitasosta poistettu negatiivinen Re-akseli ja 0.) Siis $w = Ln\, z$, $z = e^w$.

$$\frac{\Delta\, w}{\Delta\, z} = \underbrace{\frac{1}{\frac{\Delta\, z}{\Delta\, w}} \to \frac{1}{\frac{d\, z}{d\, w}}}_{\Delta\, z \to 0 \implies \Delta\, w \to 0, \text{koska} \quad Ln \quad \text{jatkuva}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Siispä $\lim_{\Delta\, z \to 0} \frac{\Delta\, w}{\Delta\, z} = \frac{1}{z}$, joten todellakin: $\boxed{\frac{d}{d\, z} Ln\, z = \frac{1}{z}}$ alueessa D.

Huomautus 6.1. Jos haluamme muodostaa logaritmin derivaatan negatiivisella reaaliakselilla, voidaan yhtä hyvin tarkastella aluetta, josta on positiivinen reaaliakseli poistettu. Tällöin sovittaisiin, että argumentti vaihtelee välillä $[0, 2\pi)$. Kyseessä on pelkästään sopimus siitä, mikä otetaan kulmamittauksen lähtökohdaksi. Toki voitaisiin ottaa mikä tahansa kulma ja poistettaisiin sen määräämä puolisäde.

Trigonometriset ja hyperboliset funktiot

Muistetaanpa, että $\sin\, z = \frac{1}{2\, i}(e^{i\, z} - e^{-i\, z})$ ja $\cos\, z = \frac{1}{2}(e^{i\, z} + e^{-i\, z})$

Siten nämä, kuten muutkin trigonometriset funktiot palautuvat eksponenttifunktioon, joten yleisen summaa, tuloa, yhdistettyjä funktioita ym. koskevan lauseen (4.1) s. 9 mukaan ne ovat analyyttisiä koko kompleksitasossa (eli kokonaisia funktiota). Derivaatat saadaan suoraan :

$\frac{d}{d\, z} \cos\, z = \frac{1}{2}(i\, e^{i\, z} - i\, e^{-i\, z}) = -\sin\, z$

(Kun i siirretään osoittajasta nimittäjään, pitää kertoa -1:llä.)

Aivan vastaavasti lasketaan: $\frac{d}{d\, z} \sin\, z = \frac{1}{2\, i}(i\, e^{i\, z} + i\, e^{-i\, z}) = \cos\, z$

Tangentti ja kotangentti (ym. sekakosekantit) saadaan nyt näistä, kuten aina ennekin.

Hyperboliset funktiot menevät vielä hiukan lyhemmin, täsmälleen, kuten reaalialueella, tuloksena:

$$\frac{d}{d\, z} \cosh\, z = \sinh\, z, \quad \frac{d}{d\, z} \sinh\, z = \cosh\, z$$

7. Laplacen yhtälö, harmoniset funktiot

[KRE] s. 672–673

Ahl
s. 25

Ahlfors: Complex Analysis, Mc Graw Hill 1966.

`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Ahlfors.html`

Huom! Lars Ahlforsin saama ensimmäinen Fielsin mitali 1936 luovutettiin perikunnan toimesta Helsingin yliopistolle Exactumin vihkiäistilaisuudessa Kumpulassa 17.9.2004.

Voidaan osoittaa: ([Ahl] s. 25, [KRE] 13.4)

Analyyttisen funktion derivaatta on myös analyyttinen, ts. jos f :llä on pisteen z_0 jossain ympäristössä derivaatta, niin sillä on samassa ympäristössä kaikkien kertalukujen derivaatat.

Koska f' voidaan lausua osittaisderivaattojen avulla, seuraa analyyttisyydesta osittaisderivaattojen jatkuvuus, ja yllä sanotusta siis kaikkien kertalukujen osittaisderivaattojen jatkuvuus samantien.

Laplacen yhtälö

$$\Delta u = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Kompleksianalyysin merkitys teknis-luonnontieteellisissä sovelluksissa johtuu eräältä tärkeältä näkökulmalta siitä, että analyyttisen funktion reaali- ja imaginaariosat ovat ns. *harmonisia funktioita*, eli toteuttavat Laplacen yhtälön.

Muotoillaan lauseeksi:

Lause 7.1 (Harmonisuus). *Olkoon $f = u+iv$ analyyttinen alueessa D. Tällöin u ja v toteuttavat D:ssä Laplacen yhtälön, eli ovat harmonisia D :ssä*

Tod. Kun derivoidaan Cauhy–Riemannin yhtälöt: ensimmäinen x :n ja jälkimmäinen y :n suhteen, saadaan:

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy}. \end{cases}$$

Edellä olevan, osittaisderivaattojen jatkuvuutta koskevan huomautuksen perusteella erityisesti toisen kertaluvun derivaatat ovat jatkuvia, joten yleisen 2-peruskurssilla esiintyneen sekaderivaattojen vaihdannaisuutta koskevan lauseen mukaan $v_{yx} = v_{xy}$, joten u :ta koskeva väite ($\Delta \boldsymbol{u} = 0$) saadaan laskemalla yllä olevat yhtälöt puolittain yhteen.
Derivoimalla ensimäinen CR-yhtälö y:n ja jälkimmäinen x:n suhteen, saadaan samalla tavalla: $\Delta\, v = 0$.

□

Määritelmä 7.1. Jos jatkuvasti derivoituvat funktiot $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ toteuttavat CR-yhtälöt, ne ovat edellisen mukaan harmonisia ja $f = u + iv$ on analyyttinen.

Tällöin sanotaan, että u ja v ovat toistensa *harmonisia liittofunktioita.*

Esimerkki 7.1. Osoita, että funktio $u(x, y) = x^2 - y^2 - y$ on harmoninen $\mathbb{C}$:ssä, ja määritä sen liittofunktio v ja siis analyyttinen funktio f, jonka reaaliosa on u.

Tod. **Harmonisuus** $\Delta\, u = u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 - 0 = 0$. (Harmonisuus säilyisi, vaikka lisättäisiin mielivaltainen 1. asteen x :n ja y :n polynomi)

Liittofunktio Etsitään funktiota v, joka toteuttaa yhtälöt
$v_y = u_x = 2\,x, \quad v_x = -u_y = 2\,y + 1.$

Integroidaan ensimmäinen y :n suhteen:

$v(x,y) = \int 2\,x\,dy + h(x) = 2\,x\,y + h(x)$, missä $h(x)$ on mielivaltainen x:n funktio.

Derivoidaan x :n suhteen ja vaaditaan, että toinen CR-yhtälö toteutuu:
$2\,y + h'(x) = v_x = -u_y = 2\,y + 1$.

Kuin ihmeen kautta (ihmeen syy:harmonisuus) $y-$termit kumoutuvat, ja saadaan yhtälö tuntemattoman funktion $h(x)$ määräämiseksi, josta saadaan: $h(x) = x + c$, missä c on mielivaltainen (reaalinen) vakio.

Siis $v(x,y) = 2\,x\,y + x + c$.

Analyyttinen funktio $f(z)$, jonka reaaliosa on annettu u, on siis $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = x^2 - y^2 - y + i(2\,x\,y + x + c)$.

Kirjoitetaan vielä muotoon $f(z) = (x^2 - y^2 + 2\,i\,x\,y) - y + i\,x + i\,c = z^2 + i\,z + i\,c$, missä c on mielivaltainen reaalinen vakio. □

Huomautus 7.1. Voidaanko analyyttinen funktio $u(x,y) + i\,v(x,y)$ aina saattaa muotoon $f(z)$ ja jos voidaan, niin miten?
Edellä asia nähtiin helposti ”takaperin”katsomalla.
Yleinen menettely olisi sijoittaa $x = (z+\bar{z})/2, y = (z-\bar{z})/(2i)$, jolloin $\bar{z}-$ termit kumoutuisivat.
Entä tämä: Sijoitetaan yllä $y = 0$, jolloin saadaan $f(x) = x^2 + i\,x + i\,c$. Jos tuollainen muoto on, sen täytyy siis olla sama, joka vallitsee reaaliakselilla. Siis se saadaan, kun x :n paikalle sijoitetaan z. Sitten on syytä tarkistaa, että näin todella on. (Tässä emme esitä yleistä todistusta asialle.)

Huomautus 7.2. Näissä laskuissa tulee helposti massiivisia derivointi- ja sievennystehtäviä. Nämä harmonisuuslaskut ja liittoharmonisen funktion etsimiset ovat onnen omiaan symbolilaskentaohjelmalle. Esimerkiksi harmonisuustarkistus voitaisiin MAPLE:lla suorittaa määrittelemällä funktio

```
> Delta:=(f,x,y)->diff(f,x,x)+diff(f,y,y);
```

Edellä oleva harmonisuustodistus sujuisi näin:

```
> u:=x^2-y^2-x;
> Delta(u,x,y);
                                 0
```

Usein tarvittaisiin vielä vaikkapa seuraavanlaista jatkoa:

```
> simplify(%);     # Sievennä edellinen derivointitulos.
>                  # Yleensä nyt viimeistään näkyy, onko tulos 0 vai ei.
```

Lause 7.2. *Olkoon $f = u + iv$ analyyttinen, ts. u ja v olkoot liittoharmonisia funktioita. Tällöin tasa-arvokäyrät $u(x,y) =$vakio ja $v(x,y) =$vakio leikkavat toisensa kohtisuorasti jokaisessa pisteessä z, jossa $f'(z) \neq 0$.*

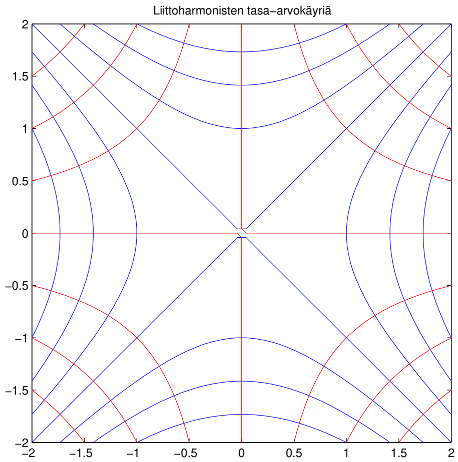
Tod. Käyrät $u(x,y) = C_1$ ja $v(x,y) = C_2$ ovat $u-$ ja $v-$funktioiden tasa-arvokäyriä. Peruskurssilla 2 on osoitettu, että tason pisteen $z_0 = (x_0, y_0)$ kautta kulkevan tasa-arvokäyrän $w(x,y) = C$ normaali on gradientin $\nabla w(x_0, y_0)$ suuntainen. Jos gradientti olisi 0, olisi kyseessä käyrän erikoispiste, jolloin ei voitaisi puhua normaalin/tangentin suunnasta. Oletus $f'(z) \neq 0$ sulkee pois tämän mahdollisuuden.

Lasketaan siis gradienttivektorit ∇u ja ∇v pisteessä z_0 ja osoitetaan, että $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

Tämä seuraa suoraan CR-yhtälöistä, sillä $\nabla u \cdot \nabla v = u_x\, v_x + \underbrace{u_y}_{-v_x}\ \underbrace{v_y}_{u_x} = 0$.

$\square$

Esimerkki 7.2. Olkoon $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2\, i\, x\, y$ Saadaan tällainen kuva, missä käyriä $u(x, y) = x^2 - y^2 = C$ on piirretty sinisellä ja $v(x, y) = 2xy = C$ punaisella.



Kuva tehtiin MATLAB-skriptillä liittoharmoniset.m:

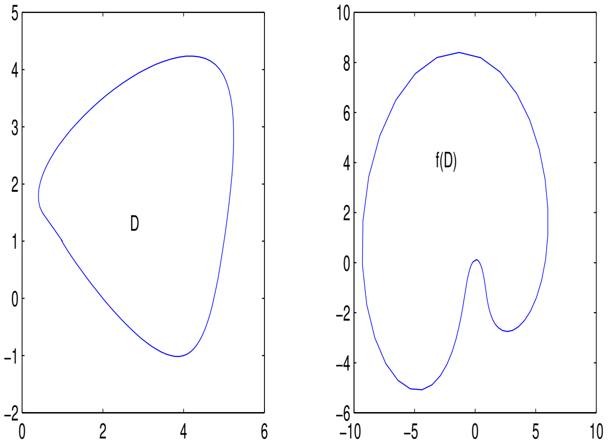
```
% Liittoharmoniset funktiot, tasa-arvokäyrät leikkaavat kohtisuorasti
% 20.9.04
close all; clear
u=inline('x.^2-y.^2','x','y'); v=inline('2*x.*y','x','y')
x=linspace(-2,2,50); y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
U=u(X,Y); V=v(X,Y);
contour(x,y,U,'b'); hold on; contour(x,y,V,'r');
axis square; title('Liittoharmonisten tasa-arvokäyriä')
```

8. Analyyttisten funktioiden geometriaa, konformikuvaukset

[KRE] 12.5 s. 674 . . .

Luvussa **??** (s. **??**) esiteltiin kompleksifunktioiden geometrista visualisointia mm. funktiota $w = z^2$ tutkimalla. Myös eksponenttifunktion kuvausominaisuuksia selviteltiin luvussa **??** (s. **??** alk.).

Geometrinen visualisointi auttaa ymmärtämään ”mistä on kyse”, aivan kuin yhden muuttujan funktioillakin. Kompleksianalyysin soveltamisen kannalta kuvausten geometristen ominaisuuksien hallitseminen on avain vakavamielisiin sovelluksiin, kuten jo edellä vihjailtiin.



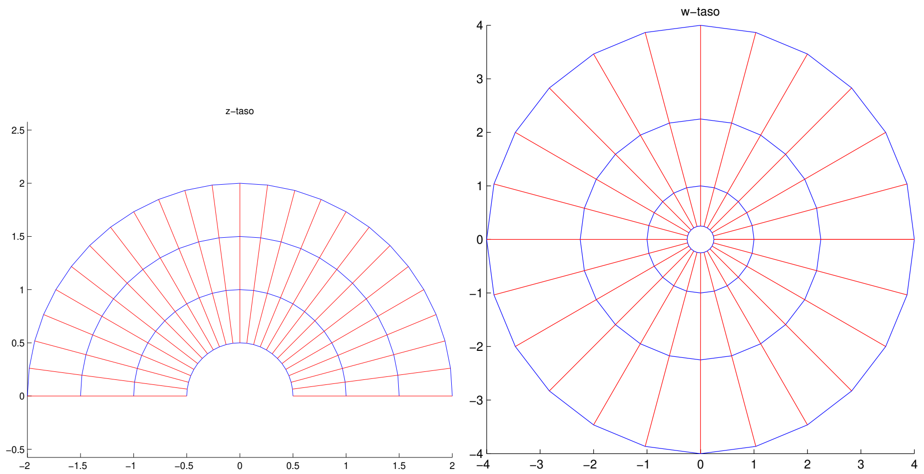
z-tason alue D ja sen kuva w-tasossa kuvauksessa $w = f(z)$

(skripti `alue.m`)

Surjektio, injektio, bijektio. Muistutetaan vielä Kuvaus $f : D \to S$ on

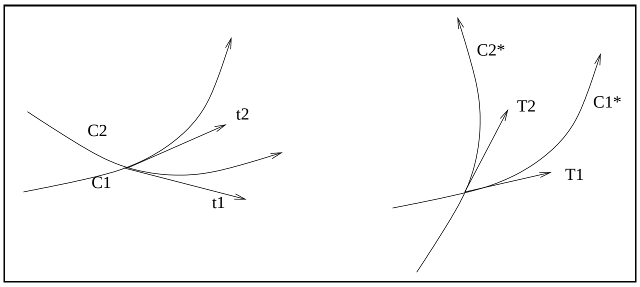
- *surjektio*, jos $f(D) = S$, eli jokainen $w \in S$ on jonkin $z \in D$ kuva. Huomaa, että rajoittamalla kuvajoukkoa saadaan aina aikaan surjektio — omalle kuvalleen, kuten kuvassa. (Engl. *onto*)
- *injektio*, jos $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$. (Engl. *one-to-one*),
- *bijektio*, jos se on kumpaakin (*one-to-one, onto*)

Palautetaan vielä näkökenttään edellä esiintynyt kuva.



Ylemmän puolitason ympyrä- ja sädeparven kuvautuminen, kun $w = z^2$

Näemme, että säteet kuvautuvat säteille ja ympyränkaaret ympyränkaarille. Siten ainakin näiden toisiaan vastaan kohtisuorien käyräparvien väliset (suorat) kulmat säilyvät kuvauksessa. Ainoa kuvasta tulkittavissa oleva kohta, jossa näin ei käy, on origo, josta lähtevien säteiden kuvasäteiden välinen kulma kaksinkertaistuu, koska $arg(z^2) = 2\, arg\, z$.



Konformikuvaus säilyttää kulmat ja suunnat

Käyrät tasossa

Tasokäyrä annetaan yleisesti parametrimuodossa

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Kompleksitasossa voidaan kirjoittaa $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$. Esimerkiksi ympyrä voidaan esittää muodossa $z = \cos\,t + i\,\sin\,t = e^{i\,t}$.

Käyrä voidaan *suunnistaa* julistamalla positiiviseksi suunnaksi se, johon käyräparametri kasvaa. Käyrä on *sileä* ("smooth"), jos $\dot{z}$ on jatkuva. Huomaa, että $z(t)$ on reaalimuuttujan kompleksiarvoinen funktio, sen derivoituvuus tarkoittaa yksinkertaisesti koordinaattifunktioiden $x(t)$ ja $y(t)$ derivoituvuutta.

Sileällä käyrällä on tangentti pisteessä $z_0 = z(t_0)$, jos $z'(t_0) \neq 0$. Tämähän on peruskurssi 1:n asioita, sillä $z'(t) = (x'(t), y'(t))$. Toisaalta geometrinen perustelu on lyhyt ja havainnollinen, joten se kannattaa palauttaa mieleen: Käyrän pistestä $z(t_0)$ pisteeseen $z(t_1)$ piirretty sekanttivektori on $z(t_1) - z(t_0)$. Jos tämä jaetaan erotuksella $t_1 - t_0$, vektori säilyy edelleen sekantin suuntaisena. Jos on olemassa

$$\dot{z}(t) = \lim_{t1 \to t_0} \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0} \neq 0,$$

niin sekanttivektoreilla on rajasuunta, jota voidaan pitää suorastaan määritelmän mukaan tangenttina. (Jos derivaatta on 0, ei rajavektorilla ole mitään määrättyä suuntaa, tällöin tangenttia ei ole.)

Määritelmä 8.1. Kompleksitason kuvaus f on *konforminen*, jos se säilyttää suunnistettujen käyrien väliset kulmat suuntineen. Ts. jos C_1 ja C_2 leikkavat pisteessä z_0 ja ja niiden (tangenttien) välinen kulma kuljettaessa leikkauspisteestä positiiviseen suuntaan on α, niin kuvakäyrien $C_1^\star$ ja $C_2^\star$ välinen kulma pisteessä $f(z_0)$ samoin positiiviseen suuntaan kuljettaessa on samainen α.

Huomautus 8.1. Kulmien säilyminen voidaan ilmaista näin: *Jos t_1 ja t_2 ovat positiiviseen suuntaan osoittavat tangentit leikkauspisteessä z_0, ja T_1 ja T_2 ovat vastaavat kuvakäyrien positiivisesti suunnatut tangenit pisteessä $f(z_0)$, niin $Arg T_2 - Arg T_1 = Arg t_2 - Arg t_1$.*

Analyyttisten funktioden teorian geometrisesti merkittävä ominaisuus on konformisuus:

Lause 8.1. *Analyyttinen funktio f on konformikuvaus kaikissa pisteissä z, joissa $f'(z) \neq 0$.*

Tod. □