Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Bingham

3. välikoe 15.12. 2005

Älä jätä täyttämättä "kansalaisvelvollisuuttasi", vaan täytä se, nimittäin **palautekysely**, kts. `www.math.hut.fi/opetus/k3` Aikaa on sunnuntai-iltaan 18.12. saakka.

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. Ratkaisun kohteena on systeemi $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Muodosta yleinen ratkaisu $\boldsymbol{y}(t)$.
   (b) Piirrä ominaissuorat ja niille suuntanuolet, jotka osoittavat etenemissuunnan ajan t kasvaessa, ja selvitä origon luonne ja stabiilisuuskäytös.
   (c) Piirrä pisteen $[0, \sqrt{2}]$ kautta kulkeva trajektori suuntanuolineen. Laske alkupisteen lisäksi ainakin 4 lisäpistettä trajektorilta, jotta saat piirrokseen tarkkuutta.

   Evästystä: Jos operoit ominaisvektorikannassa, laskutyötä on hyvin vähän. Peruskannassa operointikin on ystävällisesti järjestetty kevyeksi — työlästä ei siis ole mitenkään päin.

2. (a) Kirjoita vaimentamaton heiluriyhtälö ($k = 1$) (kts. "ohjeita") 1. kertaluvun systeemiksi ja suorita linearisointi kriittisen pisteen $(0, 0)$ ympäristössä.

   (b) Muodosta linearisoidun systeemin yleinen ratkaisu ja kirjoita se reaaliseen muotoon. Selvitä sen perusteella, minkälaisia käyriä trajektorit ovat. Piirrä pisteen $(1, 0)$ kautta kulkeva linearisoidun systeemin trajektori $t : n$ kasvun mukaisine suuntanuolineen.

3. Olkoon $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{kun } 1 < x < 2 \end{cases}$.

   (a) Piirrä f :n parillinen, 4−jaksoinen jatke välillä $[-4, 4]$
   (b) Muodosta tämän Fourier-sarja (siis jaksona 4), ja kirjoita auki sarjan neljä ensimmäistä nollasta poikkevaa termiä.

4. Kuparisauva ($c^2 = 1.14$), jonka pituus $L = 10$ cm, upotetaan kiehuvaan veteen, kunnes sen lämpötila on kauttaaltaan 100°C. Hetkellä $t = 0$ sauva otetaan vedestä, lämpöeristetään pituussuunnassa ja sen päät työnnetään jäävesisäiliöihin (0°C).

   (a) Määritä sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$.

   (b) Kuinka pitkän ajan kuluttua sauvan keskipisteen lämpötila on 10°C? Riittää käyttää approksimaationa sarjan ensimmästä termiä.

Ohjeita, kaavoja

Huom: Kaikkia kaavoja sinun ei tarvitse tarvita.

Trigonometriaa

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta \end{cases}$$

Näistä laskemalla yhteen tai vähentämällä saat tarvitsemasi tulokaavat, kuten $\sin\alpha\,\cos\beta = \ldots$ jne.

Kiertomatriisi

Kierto positiiviseen suuntaan, jos $\varphi > 0$.
$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$

Tavallisia differentiaaliyhtälöitä

Heiluriyhtälö $\Theta'' + k \sin \Theta = 0$.

Fourier-kertoimet, f määritelty välillä $(-L, L)$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}), \quad \text{missä}$$

$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx,$
$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä

Aaltoyhtälö (1-ulotteinen): $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$
Lämpö/diffuusioyhtälö (1-ulotteinen): $u_t = c^2\, u_{xx}$
Laplacen yhtälö: $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ (2-ulotteinen)

Lämpöyhtälön ratkaisu, kun sauvan pituus L, reunat $0°$:ssa ja alkuehtona $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\,\pi\,x}{L} e^{-\lambda_n^2\,t}, \quad \lambda_n = \frac{c\,n\,\pi}{L},$$

missä kertoimet B_n määrätään niin, että alkuehto toteutuu.

Menestystä kokeissa ja oikein hyvää joulunaikaa ja uutta vuotta$_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall$:lle.