Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Bingham

2. välikoe 14.11. 2005, ratkaisut

1. Gaussin rivioperaatioilla:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Viimeisessä vaiheessa kerrottiin rivi 2. luvulla -1, kun *rref*-muoto oli näin halvalla tarjolla, vallan hyvin pärjättäisiin ilmankin tätä.

Tukisarakkeet ovat sarakkeet 1 ja 2.

Sarakeavaruuden kanta saadaan alkuperäisen matriisin tukisarakkeista, ts. A :n 2 ensimmäistä saraketta: $[1, 0, 4]^T$, $[0, -1, -5]^T$.
Huom! Sarakkeiden poimiminen ref-muodosta on periaatevirhe, tässä näkyy erityisen selvästi, että ref-muodon kahden ensimmäisen virittämänä ei voida saada vektoria, jonka kolmas alkio $\neq 0$, joten A:n sarakkeet eivät mitenkään virity.

Riviavaruuden kannan muodostavat *ref*- (tai *rref*-) muodon nollasta poikkeavat rivit, siis tässä $[1, 0, -1, 2]$ ja $[0, 1, -1, 2]$.

Nolla-avaruus saadaan ratkaisemalla (HY) $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, eli $E\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, missä $E = rref(A)$. Saadaan siis yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x_1 + 0\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ 0\,x_1 + x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 0. \end{cases}$$

Merkitään vapaita muuttujia: $x_4 = s$, $x_3 = t$. Saadaan: $\begin{cases} x_1 = t - 2\,s \\ x_2 = t - 2\,s. \end{cases}$

Valinnoilla (a) $t = 0$, $s = 1$ ja (b) $t = 1$, $s = 0$ saadaan kantavektorit: $[-2, -2, 0, 1]^T$ ja $[1, 1, 1, 0]^T$.

Peruslause: $r(A) + n(A) = n$. Tässä $r(A) = 2$ (sarakeavaruuden dimensio), $n(A) = 2$ (nolla-avaruuden dimensio) ja $2 + 2 = 4$ ($4 =$ sarakkeiden lkm.)

---

2. Tämä on suoraan prujusta tai luennolta tai KRE-kirjasta (paitsi ei tarvitse sanoa, että “yleinen askel tehtäiisiin samalla tavoin”).

---

3. $P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$.

Ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.3$. Vastaavat ominaisvektorit: $\boldsymbol{v}_1 = [3, 4]^T$ ja $\boldsymbol{v}_2 = [-1, 1]^T$.

Olkoon alkupisteen esitys ominaisvektorikannassa: $\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$.

$\boldsymbol{x}_1 = P\,\boldsymbol{x}_0 = c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2$. Jatkamalla saadaan:

$\boldsymbol{x}_k = c_1\lambda_1^k\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2^k\boldsymbol{v}_2 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\,0.3^k\boldsymbol{v}_2 \to c_1\boldsymbol{v}_1$, kun $k \to \infty$, koska $0.3^k \to 0$, kun $k \to \infty$.

Niinpä rajalla osuudet ovat $\boldsymbol{v}_1$:n suuntaisen vektorin komponenttien antamat suhdeluvut $3/7$ ja $4/7$, prosenteissa 42.86 ja 57.14.

Ovat riippumattomia lähtöpisteestä, emme mitenkään käyttäneet lähtöpistettä laskuissa.

Huom! Tehtävässä ei selvästi ilmaistu, kumpi P :n sarake edustaa E:tä ja kumpi F:ää, niinpä vastauksessakin saa olla vapaus tämän suhteen.

---

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 1) = 0 \iff$

$\lambda = 4$ tai $\lambda = 3 \pm 1$. Siis ominaisarvot: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$.

Koska A on symmetrinen (reaalinen), niin eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaaliset, joten arvoa $\lambda_3 = 2$ vastaava ominaisvektori on automaattisesti kohtisuorassa kaikkia ominaisavaruuden E_4 vektoreita vastaan. Riittää siis (normeerauksen lisäksi) huolehtia siitä, että kaksinkertaista ominaisarvoa $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ vastaavat ominaisvektorit (joita symmetrisyyden perusteella tiedetään olevan 2 LRT:a), valitaan ortogonaalisiksi keskenään.

Ominaisvektorit
1) $\lambda_{1,2} = 4$. Saadaan yhtälöryhmä, joka tiivistyy yhteen yhtälöön: $x_2 - x_3 = 0$. Tässä voidaan siten valita vapaasti x_1 ja (esim.) x_3. Saadaan LRT ominaisvektorit valitsemalla ensin $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ ja sitten $x_1 = 0$, $x_3 = 1$. Näin saadaan ominaisarvoa 4 vastaavan ominaisavaruuden

kannaksi $v_1 = [1, 0, 0]$, $v_2 = [0, 1, 1]$. "Luonnollinen valinta"johti samantien ortogonaalisiin vektoreihin, joten mitään muuta ei tarvitse tehdä kuin normeerata.

2) $\lambda_3 = 2$. Saadaan yhtälöt $2\,x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0$, joten $x_1 = 0, \quad x_2 = -x_3$ ja ominaisvektori on siis $\boldsymbol{v}_3 = [0, -1, 1]^T$.

Kuten sanottu, teoria sanoo, että se on ortogonaalinen edellisiä vastaan, joten periaatteessa ei tarvitse tarkistaa asiaa. (Käytännössä toki tarkistus on aina hyväksi, mutta luotamme tässä teoriaan ja laskuihimme.)

Ortogonaalisen matriisin U saamme nyt normeeraamalla $\boldsymbol{v}_k$−vektorit, ts.

$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ja siis

$A = U\,D\,U^T$, missä $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Huom: ominaisarvot ja -vektorit voi laskea vielä lyhyemmin muistelemalla vastaavanlaista harjoitustehtävää. Ominaisarvot ovat (suoraan määritelmän mukaan) diagonaalilohkojen ominaisarvot ja ominaisvektorit saadaan diagonaalilohkojen ominaisvektoreista täydentämällä ne nollilla (niinikään suoraan määritelmän ja matriisikertolaskukaavan mukaan). Tämä johtaa automaattisesti ortogonaalisiin, koska $2 \times 2-$lohko on symmetrinen. (Kieltämättä hiukan lyhyt selitys, mutta näin se menee.)