Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Bingham

2. välikoe 14.11. 2005

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

rivi-, sarake- ja nolla-avaruuksille kannat ja totea "lineaarialgebran peruslauseen"[1] voimassaolo.

2. Olkoon A $n \times n$-matriisi, ja olkoon sillä erilliset ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Olkoot $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ (jotkin) näitä vastaavat ominaisvektorit. Osoita, että $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ on lineaarisesti riippumaton. (Tarkoitus on tietysti käyttää `LRT`:n määritelmää, eikä vedota lauseeseen :-))

3. Erään asutuskeskuksen alueella on kiristyneen kilpailutilanteen johdosta jäljellä vain kaksi matkapuhelinoperaattoria E ja F. (Jälkimmäinen muodostettiin erään öljy-yhtiön johtajien optiopääomien turvin.)

Liittymien vaihtoa kuukaudessa edustakoon siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Olkoot liittymäosuudet marraskuun lopussa $F = 10$ ja $E = 90$ prosenttia. Mitä tasapainojakaumaa lähenevät liittymäosuudet, kun kuukausien lukumäärä kasvaa rajatta? Vaikuttaako alkujakauma asiaan?

4. Muodosta ortogonaalinen diagonalisointi matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

ts. sanoen määritä ortogonaalinen matriisi U ja diagonaalimatriisi D siten, että $A = U\,D\,U^T$.

[1] Yhtälö, jossa esiintyy nulliteetti $n(A)$ ja rangi $r(A)$