Mat-1.433/443/131 Peruskurssit K3/P3/KeTeMa

Apiola/Bingham

Tentti- ja uusintavälikoetehtävät, 30.1.2006

Samassa nipussa ovat tammikuun 2006 tenttitehtävät ja kaikki uusintavälikoetehtävät.

Voit päättää, suoritatko jonkin välikoeuusinnan vai tentin, molempia et voi tehdä, etkä useampaa välikoetta. (Jos **luovutat useamman** koesuorituksen, niin **suorituksiasi ei arvostella** lainkaan.) Kussakin välikokeessa on normaaliin tapaan 4 tehtävää, arvostelu normeerataan kertomalla 3/4:lla, eli max=18. Voimaan jää se välikoepistemäärä, joka on korkeampi. Hyväksyttävän poissaolosyyn esittäneiden oppilaiden välikoesuoritukset arvostellaan ilman yo. normeerausta, eli max = 24.

Kurssin **Mat-1.131 (KeTeMa)** suorittaminen on Ke-osastolaisille myös mahdollista tentillä, tällöin valitaan tenttitehtävät 1,2,3 ja uusintavälikokeen 2 tehtävä 4. Välikokeen 1 tai 2 voi uusia myös KeTeMa-suoritusta varten.

Funktiolaskin sallittu, **kaikilla 4:n tunnin koeaika**

Tentti

1. (a) Piirrä z-tasoon suorakulmio $-1 < x < 1, \quad -\pi/2 < y < \pi/3 \quad (z = x + i\,y)$ ja w-tasoon sen kuva kuvauksessa $w = e^z$.

   (b) Osoita, että $f(z) = e^z$ on derivoituva kaikissa kompleksitason pisteissä z, ja määritä derivaatta $f'(z)$.

2. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä

$$y'' + 5\,y' + 6\,y = r\,(t)\,, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

   missä $r(t) = \begin{cases} 2, & \text{kun } \; 0 \le t < 4 \\ 0, & \text{kun } \; t \ge 4 \end{cases}$

3. Presidentinvaalin toinen kierros käydään ehdokkaiden H ja N välillä. Tarkastellaan niitä äänestäjiä, jotka käyvät äänestämässä varsinaisena vaalipäivänä 29.1.06 [1]. Oletetaan, että mainittujen äänestäjien joukossa ehdokkaiden kannatusprosentit muuttuvat päivittäin siirtymämatriisin $P = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.1 \\ 0.09 & 0.9 \end{bmatrix}$ osoittamalla tavalla. Tässä ensimmäinen rivi ja sarake viittaavat ehdokkaaseen H ja toinen ehdokkaaseen N .

   (a) Laske P :n ominaisarvot ja suurempaa vastaava ominaisvektori sekä perustele ominaisvektorien lineaarinen riippumattomuus.

   (b) Olkoon $\boldsymbol{x}_0 (= [H_0, N_0]^T)$ jokin prosenttilukuvektori ja olkoon $\boldsymbol{x}_k = P\,\boldsymbol{x}_{k-1}, k = 1, 2, \ldots$. Olkoot P :n ominaisvektorit $\boldsymbol{v}_1$ ja $\boldsymbol{v}_2$. Kohdan (a) perusteella mielivaltainen lähtövektori $\boldsymbol{x}_0$ voidaan esittää muodossa $\boldsymbol{x}_0 = c_1\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\boldsymbol{v}_2$.
   Osoita tästä esityksestä lähtemällä, että jono $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1,2,\ldots}$ lähenee rajavektoria, kun $k \to \infty$.

   (c) Määritä tämä rajavektori (joka on hyvä approksimaatio “oikealle” vaalivektorille x_{14}).
   (Huom: Kertoimia c_1 ja c_2 ei tarvitse laskea. Se, joka rajankäynnin jälkeen jää määrättäväksi, saadaan sillä perusteella, että vektorin komponentit ovat prosenttilukuja.)

   (d) Vapaaehtoinen (ei pisteitä): Vertaa tulosta oikeaan vaalitulokseen ja hämmästy (suuntaan tai toiseen)!

4. Ratkaise alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(0) = [-1, -1]^T$, kun $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

   Selvitä kriittisen pisteen $\mathbf{0}$ luonne (noodi, satula, spiraali, tms.) ja stabiilisuuskäytös, sekä piirrä kuvaan ominaisvektorit ja edellä saatu ratkaisutrajektori (muutaman lasketun pisteen avulla) suuntanuolineen. (Siis suuntanuolet myös ominaisvektoreille.)

5. Kuparia muistuttava sauva ($c = 1$), jonka pituus $L = 10$ cm, upotetaan kiehuvaan veteen, kunnes sen lämpötila on kauttaaltaan 100°C. Hetkellä $t = 0$ sauva otetaan vedestä, lämpöeristetään pituussuunnassa ja sen päät työnnetään jäävesisäiliöihin (0°C).

   (a) Määritä sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$.

[1] Tehtävä on laadittu ennen vaaleja

(b) Kuinka pitkän ajan kuluttua sauvan keskipisteen lämpötila on 20°C? Riittää käyttää approksimaationa sarjan ensimmäistä termiä.

Uusintavälikoe 1

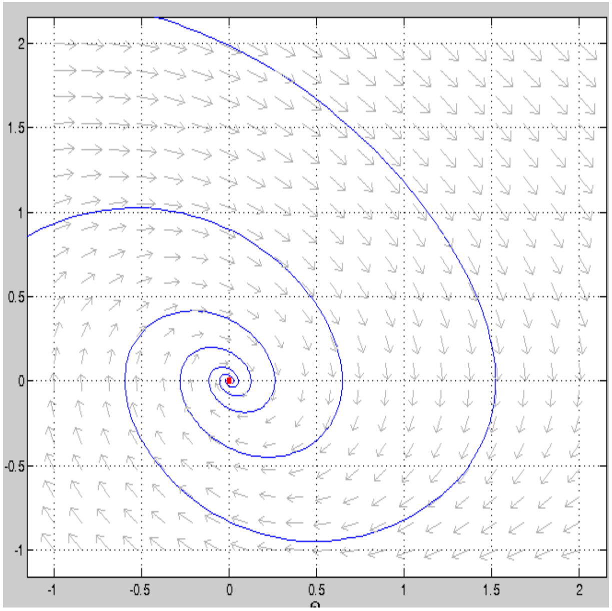
1. Määritä yhtälön $z^6 = 1 + i\sqrt{3}$ kaikki ratkaisut $\mathbb{C}$:ssä. Ilmoita sekä tarkat arvot että likiarvot ja piirrä kuva, johon merkitset nuo arvot.
   (Huomaa, että saat tarvitsemasi argumentin tarkan arvon, kunhan piirrät itsellesi tasasivuisen kolmion ja sille sivun keskinormaalin.)
2. Tenttitehtävä 1
3. (a) Johda Laplace-muunnos $\mathcal{L}\{\sin t\}$ derivoimalla kaksi kertaa ja käyttämällä hyväksi (toisen) derivaatan Laplace-muunnoksen kaavaa.
   (b) Muodosta käänteismuunnos
   $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3\,s+4}{s^2+4\,s+13}\}.$$
4. Tenttitehtävä 2

Uusintavälikoe 2

1. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
   nolla-avaruuden *Nul(A)*, sarakeavaruuden *Col(A)* ja riviavaruuden *Row(A)* kannat. Esitä käsitteiden *rangi* ja *nulliteeti* määritelmät ja totea, että laskusi tukee niiden välillä vallitsevaa yhteyttä.
2. Tenttitehtävä 3
3. (a) Osoita, että vektorit $\boldsymbol{v}_1 = [1,-2,1]^T$, $\boldsymbol{v}_2 = [0,1,2]^T$, $v_3 = [-5,-2,1]^T$ muodostavat ortogonaalisen kannan $\mathbb{R}^3$:ssa.
   (b) Määritä vektorin $\boldsymbol{v} = [1,0,1]^T$ esitys tässä kannassa.
4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ Tiedetään, että $A : n$ eräs ominaisarvo on 2 ja eräs ominaisvektori $= [1,1,1]^T$.
   (a) Määritä A :n muut ominaisarvot ja -vektorit.
   (b) Muodosta A:lle ortogonaalinen diagonalisointi.

Uusintavälikoe 3

1. Tenttitehtävä 4
2. Tarkastelun kohteena on vaimennettua heiluria kuvaava yhtälö $\Theta'' + c\,\Theta' + k\,\Theta = 0$, missä vakioilla on arvot $k = 1,\quad c = 0.5$. Kuvassa näkyy suuntakenttä ja mm. pisteen $(0,2)$ kautta kulkeva trajektori (alkupoikkeutus $= 0$, alkukulmanopeus $= 2$(rad/s)).
   (a) Kirjoita yhtälö 1. kertaluvun systeemiksi.
   (b) Linearisoi systeemi kriittisen pisteen **0** ympäristössä ja päättele ominaisarvojen perusteella, että tyyppi on sopusoinnussa kuvan kanssa.
   (c) Suorita kolme askelta Eulerin menetelmällä lähtien ajanhetkellä $t = 0$ pisteestä $(0,2)$ käyttäen (aika-)askelpituutta $h = 0.5$. Piirrä pisteet ja niitä yhdistävä murtoviiva faasitasoon ja arvioi kuvasta, minkälainen virhe loppupisteessä syntyy.



3. Olkoon $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ -1, & \text{kun } 1 < x < 2 \end{cases}$.

   (a) Piirrä f :n parillinen ja pariton 4−jaksoinen jatke välillä $[-4, 4]$
   (b) Muodosta parillisen jatkeen Fourier-sarja (siis jaksona 4), ja kirjoita auki sarjan neljä ensimmäistä nollasta poikkevaa termiä.

4. Tenttitehtävä 5

Kaavoja, ohjeita

Kaikkia kaavoja sinun ei tarvitse tarvita.

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_rs+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Fourier-kertoimet, f määritelty välillä $(-L, L)$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}), \quad \text{missä}$$

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$,
$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$, $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$, $n \in \mathbb{N}$

Diffyht. numeriikkaa, Eulerin menetelmä

$\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$, $t_{n+1} = t_n + h$, $\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n)$, $n = 0, 1, \ldots$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä

Aaltoyhtälö (1-ulotteinen): $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$
Lämpö/diffuusioyhtälö (1-ulotteinen): $u_t = c^2\, u_{xx}$
Laplacen yhtälö: $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ (2-ulotteinen)

Lämpöyhtälön ratkaisu, kun sauvan pituus L, reunat $0°$:ssa ja alkuehtona $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\,\pi\,x}{L} e^{-\lambda_n^2\,t}, \quad \lambda_n = \frac{c\,n\,\pi}{L},$$

missä kertoimet B_n määrätään niin, että alkuehto toteutuu.

Toivotan hyvää koemenestystä ja matematiikan peruskurssien jälkeistä elämää. Minun osaltani tässä ovat “vier letzte Lieder”. (`http://dana.ucc.nau.edu/~avj2/vier_letzte_lieder.htm}`)

HEIKKI