Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Bingham

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 5 AV (viikko 42 , 17 – 19.10.2005), **alkuviikko**

Kurssin www-sivuja:
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`
Matlab-opas: `http://www.math.hut.fi/ apiola/matlab/opas/lyhyt/`

Kun puhutaan lineaarisesta yhtälösysteemistä (tai -ryhmästä) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tarkoitetaan yleistä $m \times n-$ tilannetta, ellei toisin mainita.

1. Miksi lineaarisella yhtälösysteemillä $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ei voi olla tasan kahta ratkaisua?
   Vihje: Voit vedota yleiseen `LINSYS`-lauseeseen (jos haluat käyttää raskasta kalustoa), voit myös tanssia kepeämmin pelkin lineaarisuuden tarjoamin askelkuvioin tyyliin: "ei kahta ilman kolmannetta".
   Kehoitus: Mieti myös geometrista tulkinta 2- ja 3-ulotteisissa tapauksissa.

2. (a) Olkoon 3×5 *kerroinmatriisilla* A kolme tukisaraketta. Onko systeemi $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ konsistentti.
   (b) Olkoon 3×6-systeemin *liitännäismatriisin* $\tilde{A}$ kuudes sarake tukisarake. Onko systeemi konsistentti vai ei?
   (c) Olkoon systeemin kerroinmatriisin A jokaisella rivillä tukialkio. Selvitä, miksi systeemi on konsistentti.

3. Osoita, että vektorit $[0,0,0,1]^T$, $[0,0,1,1]^T$, $[0,1,1,1]^T$ ja $[1,1,1,1]^T$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^4$ kannan ja määritä vektorin $\boldsymbol{v} = [-1,0,1,2]^T$ esitys tässä kannassa.

4. Kuva esittää liikenneverkkoa. Kadut ovat yhdensuuntaisia nuolien osoittamalla tavalla. Kuvaan on merkitty risteyksiin tulevat ja niistä lähtevät liikennemäärät tunnissa. Koska risteykseen saapuvien ajoneuvojen täytyy myös poistua siitä, saadaan yhtälöryhmä tuntemattomien liikennemäärien x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 määräämiseksi, jotka kuvaavat liikennemääriä katuverkossa. Lisäksi koko verkkoon tulevien ja siitä lähtevien ajoneuvojen määrien täytyy olla samoja. (Pysäköidyt ajoneuvot hinataan pois omistajan kustannuksella.)

```
     Fabianink.                    Unionink.
      ^                              v
      | x3                           |100
 300  |           Pohj.espl.         |
<-------------------<-------------------< 400
      |             x4               |
   x2 ^                              v x5
      |             x1               |
>------------------->-------------------> 600
  300 |          Eteläespl.         Suljettu
      |                             katutyön
      ^                             takia

     500
```

Saata yhtälöryhmä kolmiomuotoon ja määritä ratkaisut.
Missä rajoissa Eteläesplanadin liikennemäärä voi vaihdella, jotta millään katuosuudella ei tarvitse vaihtaa ajosuuntaa osoittavia liikennemerkkejä?

5. Määritä matriisin $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ aste l. rangi ("rank").

6. Selvitä *Gauss–Jordanin* algoritmilla matriisin $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ kääntyvyys ja myönteisessä tapauksessa (siis pelin edetessä loppuun saakka) määritä A^{-1}. Tarkistuksen saat mieluusti tehdä esim. MAPLE:lla tai MATLAB:lla.

Ohjelmistoista
Kannattaa kokeilla matemaattisia ohjelmia, matriisioperaatioissa aivan erityisesti MATLAB:ia, mutta vaihtoehtoisesti myös vaikka MAPLE:a.
Esim. tehtävän 6 matriisi luodaan MATLAB:ssa tyyliin:
`>> A=[0 1 2;1 0 3;4 -3 8]` (Tässä `>>` on MATLAB-ohjelman kehote.) Kertolasku: `A*B`, käänteismatriisi: `inv(A)`.
Maple: `> with(LinearAlgebra): A:=<<0,1,4>|<1,0,-3>|<2,3,8>>; A.B; MatrixInverse(A);`