Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 4 AV (viikko 41 , 10 – 12.10.2005), **alkuviikko**

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`

1. Tarkastellaan vapaata vaimennettua värähtelyliikettä mallintavaa yhtälöä $y'' + 2\,c\,y' + \omega_0^2\,y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$. Tässä vaimennusvakiota on merkitty $2c$:llä ja vaimentamattoman (harmonisen) värähtelijän ominais(kulma)taajuuttaa ω_0 :lla.
(a) Osoita, että ratkaisun Laplace-muunnos saa muodon
$$Y(s) = \frac{y_0\,s + v_0 + 2\,c\,y_0}{(s+c)^2 + \omega_0^2 - c^2}.$$
(b) Osoita, että "kriittisen vaimennuksen tapauksessa", eli $c = \omega_0$, saadaan ratkaisuksi
$y(t) = ((v0 + cy0)\,t + y0)\,e^{-ct}$

2. Kirjoita funktio $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 2 \\ 4, & t \ge 2 \end{cases}$ Heavisiden funktioiden, eli yksikköaskelfunktioiden u avulla ja muodosta t-siirtosääntöä hyödyntäen Laplace-muunnos $\mathcal{L}(f)$.
Vihje: Jos summassa esiintyisi vaikkapa muotoa $t^2u(t-a)$ oleva termi, joutuisit t-siirtosäännön soveltamiseksi kirjoittamaan "väkisin" $(t-a)^2u(t-a)$ ja korjaamaan sitten aiheuttamasi virheen. Tähän tyyliin edeten pääsisit sitten t-siirron edellyttämään muotoon. (Systemaattisempi tapa kirjoittaa $q(t) = t^n$ potenssien $(t-a)^k$ avulla olisi muodostaa n-asteinen Taylorin polynomi $q(a) + q'(a)(t-a) + \frac{q''(a)}{2!}(t-a)^2 + \ldots$.)

3. Olkoon f paloittain jatkuva ja eksponentiaalista kertalukua (M, σ) ja olkoon $F = \mathcal{L}(f)$. Osoita, että $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$. Pohdi ("vapaaehtoisesti") tätä taustaa vasten kaavan $\mathcal{L}\delta = 1$ sisältöä ja sitä, millainen olio on (tai pikemmin ei ole) Diracin $\delta-$"funktio"(oikeammin "distribuutio")
Vihje varsinaiseen tehtävään: Aivan suoraan määritelmästä [1] saat johdetuksi sopivan epäyhtälön.

4. Massa-jousisysteemiä mallintava differentiaaliyhtälö alkuehtoineen olkoon
$$y'' + 3\,y' + 2\,y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$
Herätteenä $r(t)$ on hetkellä $t = 2$ tapahtuva kahden yksikköimpulssin suuruinen vasaranisku, jota mallinnetaan *Dirac'n deltalla*,
tässä siis $r(t) = 2\,\delta(t-2)$. Määritä yhtälön ratkaisu eli vaste $y(t)$. Määritä lisäksi ajanhetki, jolla vaste saa maksimiarvonsa ja hahmottele kuvaaja (suunnilleen) välillä $[0, 4]$.
(Tämä on muuten sama kuin "impulssivaste", mutta isku on kahden yksikön suuruinen ja tapahtuu viivästetysti, vasta hetkellä $t = 2$.)

5. Määritä käänteismuunnokset $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$, kun
(a) $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, (b) $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+9)^2}$.
Käytä konvoluutiolausetta. Tarkista (a)-kohdan ratkaisu osamurtotyylillä. Totea ("vapaaehtoisesti"), että tässä tapauksessa konvoluutiolause on sama asia kuin integraalin muunnoskaava.
(b) Integrointi sujuu, kun muistelet tyyliä $\cos\alpha\,\cos\beta$ olevia kaavoja, jotka saat käden käänteessä johdetuksi kaavoista
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta$.
"Vapaaehtoinen"pohdinta: Onnistuisiko tämä osamurtotyylillä?
Vast (b) $(1/6)(\sin 3\,t + 3t\cos 3\,t)$

6. Ratkaise konvoluutiolausetta hyödyntäen yhtälö
$y'' + 4\,y = r(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$, missä $r(t) = 1, \quad$ kun$0 < t < 1, \quad 0,$ muuten.
Huom! Herätettä $r(t)$ ei Laplace-muunneta lainkaan.
Vast: $y\,(t) \;=\; 3/4\cos\,(2\,t) + 1/4 - 1/2\,u\,(t-1)\,(\sin\,(t-1))^2$ Tämä on Maplen generoima vastauskaava, Maplea ei voi, toisin kuin teekkareita, komentaa käyttämään konvoluutiolausetta. Voi olla, että johdut luonnostaan paloittain määriteltyyn muotoon, mutta on hyvä toki osata kirjoittaa se sujuvasti "u-muotoon". Huomaa myös trig. funktioiden potenssien ja kaksinkertaisten kulmien väliset kaavat, vastaus voi siksikin ilmetä erinäköisenä.

---

[1] $|f(t)| \le M\,e^{\sigma\,t}$. (Huom: KRE-kirjan 8:nnessa painoksessa on vanhemmissa editioissa virheellinen miinusmerkki, σ:ssa, jota kirjassa merkitään k:lla, uudemmissa näkyy korjatun.)