Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 3 LV (viikko 39 , 28 – 30.9.2005), **alkuviikko**

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`

Tehtävät loppuviikolle 39

1. (a) Määritä pääarvo $(1+i)^{i-1}$.
   (b) Määritä kaikki ratkaisut yhtälölle $\sin z = \cosh 2$.

   Vast. (b): $\frac{1}{2}(4\,n+1)\pi \pm 2\,i$

2. Määritä analyyttinen funktio $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, kun
   (a) $v(x,y) = 2\,y(x+1)$, (b) $v(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin 2\,x\,y$

   Vihje: (a)-kohta normaaliin tapaan CR-yhtälöiden avulla, (b)-kohdassa kannattanee pysähtyä hetkeksi katselemaan ja arvailemaan, mikä tuo analyyttinen funktio voisi olla.

3. Kirjoita funktio $f(z) = \frac{1}{z^2}$ muotoon $u(r,\varphi) + i\,v(r,\varphi)$ ja osoita (hyvin tunnettu asia), että f on analyyttinen koko tasossa, josta origo on poistettu, sekä johda (erittäin hyvin tunnettu) derivoimiskaava tätä kautta.

   Vihje: Sovella CR-yhtälöiden napakoordinaattimuotoa, jonka löydät prujusta tai KRE-kirjasta.

4. Olkoon D kiekon $|z - 1/2| < 1/2$ komplementti oikeassa puolitasossa $Re\,z > 0$. Osoita, että D:n kuva kuvauksessa $f(z) = 1/z$ on pystykaistale $0 < Re\,w \leq 1$.

   Vihje: Riittää selvittää, minkälaiset käyrät (ympyrät) kuvautuvat pystysuorille $u = c (=$ vakio$)$. Muodosta siis $1/z$:n reaaliosa, ja vaadi se vakioksi. Neliöksi täydentämällä saat keskipisteen ja säteen tuon vakion avulla.

(Lisä)ohjeita

Tehtävä 1
(a) Yleinen potenssi määritellään kaavalla $z^c = e^{c\,\log z}$, kuten luonnollista on. Pääarvo on logaritmin pääarvo.
(b) Tyyppiä $\sin z = c$ tai $\cos z = c$ (tai vastaavat hyperboliset) ratkaistaan luontevasti kirjoittamalla määritelmät exp-funktion avulla. Jos merkitään (trig. tapauksissa) $w = e^{i\,z}$, saadaan toisen asteen yhtälö w :n määräämiseksi. $i\,z$ saadaan nyt suoraan logaritmina, tai voidaan kirjoittaa yhtälö $e^{i\,z} = ...$ (mikä on oikeastaan sama asia). Tässä tehtävässä kannattaa kirjoittaa oikea puoli exp-funktion avulla, tällöin w :n ratkaisulauseke sievenee mukavasti ja vältytään kokonaan likiarvojen laskennalta, kuten vastauksestakin ilmenee. (Toinen ratkaisutapa olisi aloittaa kaavalla $\sin(x + i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Voit toki kokeilla sitäkin ...)

Tehtävä 2 (a)-kohta menee normaaliin tyyliin, voit ottaa mallia luento(pruju)esimerkeistä, AV2-tehtävästä, KRE-kirjasta ym.
(b)-kohdassa voit toki kokeilla, minkälaiseen integraaliin joudut standardimenettlyllä. Kuten sanottu, tämän voit keksiä suoraan, kun vähän pengot funktiovalikoimaasi. (Tehtävä on samanhenkinen kuin integraalifunktion keksimistehtävä integrointitekniikkaharjoittelussa.)

Tehtävä 3 Aloita kirjoittamalla $z = r\,e^{i\,\varphi}$.

Tehtävä 4 Tässä on esimerkki 1. asteen rationaalifunktiosta, joita yleisesti kutsutaan ”Möbius-kuvauksiksi”. Niille luonteenomaista on, että ympyrät ja suorat kuvautuvat toisikseen (voivat mennä ”ristiin”, siis esim. ympyrät suoriksi). Niillä voidaan ratkaista monenlaisia sovellutuksissa tärkeitä kuvaustehtäviä.

Tässä tehtävässä kysymyksenasettelu on päinvastainen kuin esim. tutkiessamme funktioiden z^2 tai $\sin z$ kuvausominaisuuksia. Nyt kysytään, minkälaiset käyrät $z-$tasossa kuvautuvat annetunlaisille käyrille (pystysuorille) $w-$tasossa.

Autetaan vielä senverran, että pystysuorille kuvautuvat ympyrät, joiden keskipiste on $x-$akselilla ja jotka sivuavat $y-$akselia, kuten neliöksi täydentämislasku osoittaa. Kun keskipiste liukuu tarpeeksi kauas x-akselilla, saadaan miten kaukana tahansa oleva $D-$alueen piste vangituksi ympyrän sisään.