Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Bingham

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 2 AV (viikko 39 , 26 – 28.9.2005), **alkuviikko**

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`

Tehtävät alkuviikolle 39

1. Määritä muodossa $u + i\,v$ a) $\cos(1 + 2\,i)$ b) $\sin \pi\, i$, c) $\cosh(-3 - 6\,i)$
2. Määritä $z-$tason neliön $[0, 1] \times [0, 1]$ kuvajoukko kuvauksessa $w = i\,z^2$. Missä kuvaus on konforminen ja missä ei, ja miten konformisuus tai sen puute ilmenee kuvassa?

   Vihje: Tarkastele reunakäyrien kuvautumista.
3. Funktioiden cos ja sin analyyttisyys seuraa eksponenttifunktion analyyttisyydestä ja yleisistä summaa, yhdistettyä funktiota jne. koskevista säännöistä. (Luentoprujussa on todettu ja laskettu samalla tutut derivoimiskaavat.)

   Osoita tällä kertaa sama asia Cauchy–Riemannin yhtälöiden avulla ja johda tätä kautta derivoimiskaava(t). Riittää, kun teet toisen, oman valintasi mukaan.

   Määritä kaikki kompleksitason pisteet, joissa kuvaus $w = \sin\, z$ ei ole konforminen.
4. Osoita, että funktio $u(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$ on harmoninen ja määritä analyyttinen funktio f, jonka reaaliosa on u. Jos kirjoitat tuloksen muotoon $f(z) =$ lauseke, jossa esiintyy muuttujana vain$z$, niin hyvä, mutta hyväksytään myös muoto $u(x, y) + i\,v(x, y)$.
5. Piirrä alueen $0 < x < \pi/2, \quad 0 < y < 2$ kuva kuvauksessa $w = \sin\, z$
6. Olkoon $f(z) = z^2 + \frac{1}{z^2}$. Missä pisteissä kuvaus $w = f(z)$ ei ole konforminen? Merkitse nämä pisteet tasoon. Kirjoita $w = f(r\, e^{i\,\varphi})$ muotoon $u + i\,v$ ja selvitä, minkätyyppisiksi käyriksi kuvautuvat ympyrät $r =$ vakio. (Tehtävässä on samankaltaisuutta ”Joukowski airfoil-esimerkin kanssa, KRE ss. 677–678, toki lasku on suoraviivainen muutenkin)

Ohjeita

Ellipsin parametrimuotoinen yhtälö: $x = a\, \cos\, t, \quad y = b\, \sin\, t$
Hyperbelinin parametrimuotoinen yhtälö: $x = a\, \cosh\, t, \quad y = b\, \sinh\, t$