Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 1 LV (viikko 37 , 14 – 16.9.2005), **loppuviikko**

Näihin harjoituksiin liittyvää oppimateriaalia:
Pruju: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/kompleksianalyysi_osa1.pdf`
Päivittyy ja tulee Edita-jakoon.Älä printtaa yleisillä!
Oppikirja KRE8 CH 12 pykälät 1–2.

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`

Uudesta lukukauden jaosta (syysloma/tenttikausi viikolla 43) johtuen harjoitukset joudutaan alkamaan jo samalla viikolla kuin luennot. Ensimmäiset harjoitukset pidetään ohjattuina ex tempore-tilaisuuksina loppuviikon ryhmissä. Lasketaan assarin opastuksella kertausluonteisia tehtäviä. Nämä asiat käydään lyhyesti luennolla, mutta tehtäväpaperin loppuun koottujen tietoiskujen avulla pitäisi näiden tekemisen onnistua, vaikka kaikkea ei olisikaan ehditty kateederilta juhlallisesti julistaa.

Koska alku tulee näin äkkiä, ei harjoitusryhmiä saada vielä tähän jaetuksi. Näissä 1. LV-harjoituksissa itse kukin saa vapaasti valita harjoitusryhmän kurssisivun kohdasta `luento- ja harjoitusajat` löytyvästä listasta. (Näistä harjoituksista ei niin ollen jaeta läsnäolopisteitä, niistä ammennetaan pelkästään tiedon/taidon kultajyviä.)

Tehtävät loppuviikkolle 37

1. (a) Olkoon $z_1 = 3 + 4\,i, \quad z_2 = 5 - 2\,i$.
   Määritä muodossa $x + i\,y$ lausekkeet $(z_1 - \overline{z_2})^2$ ja $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$,
   (b) Määritä $Re\,\frac{z}{\overline{z}}$ ja $Im\,\frac{z}{\overline{z}}$, kun $z = x + i\,y \quad (x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R})$.
2. Lausu *De Moivre'n kaavaa* hyödyntäen $\cos 3\varphi$ ja $\sin 3\varphi$ $\cos\varphi$:n ja $\sin\varphi$:n potenssien avulla. Tässä oletetaan: $\varphi \in \mathbb{R}$.
3. Määritä $Arg\,z$ (argumentin pääarvo eli päähaara-arvo), kun $z =$ (a) $1 + i$, (b) $-1 + i$, (c) $-1 - i$, (d) $1 - i$.
   Lausu kukin myös muodossa $\overline{\arctan}\frac{y}{x} + k\,\pi, \quad k = 0, 1, -1$, missä $\overline{\arctan}$ tarkoittaa arkustangentin päähaaraa.
4. Osoita, että $\sqrt{\frac{i}{2}} = \frac{1+i}{2}$, missä $\sqrt{z}$ tarkoittaa neliöjuuren päähaaraa, ts. sitä, jonka argumentin päähaara on välillä $(-\pi/2, \pi/2]$
5. Määritä yhtälön $z^5 = -1 - i\sqrt{3}$ kaikki ratkaisut $\mathbb{C}$:ssä. (Huomaa, että saat tarvitsemasi argumentin tarkan arvon, kunhan piirrät itsellesi tasasivuisen kolmion ja sille sivun keskinormaalin.)
6. Olkoon ω juuren $\sqrt[n]{1}$ arvo, joka saadaan juurikaavasta, indeksillä $k = 1$.
   (a) Osoita, että kaikki ykkösen n:nnet juuret voidaan lausua muodossa $1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{n-1}$.
   (b) Osoita, että ykkösen n:nsien juurien summa = 0. Vihje: Muista, että geometrisen summan kaava pätee yhtä hyvin kompleksialueella, ovathan laskusäännöt aivan samat.
   (c) Tulkitse (b)-kohdan tulos geometrisesti.

Perusasioita kompleksiluvuista

$z = x + iy = (x, y)$, $x = Re\,z$, $y = Im\,z$. Kyseessä on xy-tason pisteet, joille käytetään myös vektorimerkintää $x\,1 + y\,i$, missä 1 on x-akselin ja i on y-akselin suuntainen yksikkövektori. (Useimmiten kirjoitetaan $x + i\,y$.) Kompleksitaso $\mathbb{C}$ on siis sama kuin reaalilukuparien taso $\mathbb{R}^2$, mutta kompleksiluvuille on lisäksi määritelty **kertolasku**.

Laskusäännöt samat kuin reaaliluvuilla, lisäksi $i^2 = -1$

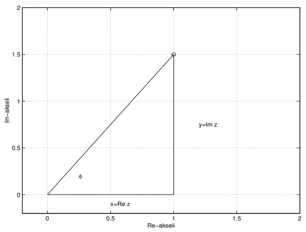
Liittoluku: $\overline{z} = x - iy$

Moduli, eli itseisarvo: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Rationaalilauseke saadaan muotoon $Re + i\,Im$ **laventamalla nimittäjän liittoluvulla**.

Yhtäsuuruus: $z_1 = z_2 \iff Re\,z_1 = Re\,z_2$ & $Im\,z_1 = Im\,z_2$

Polaarimuoto



KOMPLEKSILUVUN POLAARIESITYS

Kyse ei ole sen kummemmasta kuin kompleksiluvun (xy-tason pisteen) esittämisestä napakoordinaateissa. Nimitykset vain kalskahtavat “tieteellisiltä”: napakulmaa kutsutaan *argumentiksi* ja napasäteen pituutta (r), eli pisteen (x, y) etäisyyttä origosta *moduliksi* eli *itseisarvoksi.*

$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad r = |z|, \varphi = arg\, z$

$arg\, z$ on 2π :n monikertaa vaille määrätty.

Argumentin *päähaara* $Arg\, z$ on välillä $(-\pi, \pi]$

Yhtäsuuruus: $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2|$ & $arg\, z_1 = arg\, z_2 + 2k\pi$.

Huom: Jos napasäde r on annettu, niin argumentti $arg\, z$ määrää kompleksiluvun yksikäsitteisesti. Kääntäen kompleksiluku ei määrää argumenttia kuin 2π :n monikertaa vaille. (Tämän yksinkertaisen asian toistaminen tuntuu ehkä jankkaamiselta, mutta tämä seikka vaikuttaa monessa ...)

Argumentin määrääminen

Annettu $z = x + iy$, katsotaan x:n ja y :n merkkien perusteella, mihin koordinaattineljännekseen z kuuluu. Määrätään tämän neljänneksen kulma φ, jolle $\tan\varphi = y/x$.
(Siis $Arg\, z = \arctan \frac{y}{x}$, johon voidaan joutua lisäämään $\pm\pi$.)

Kerto- ja jakolasku (kannattaa) polaarimuodossa

Modulit kerrotaan ja argumentit lasketaan yhteen. (Argumentin päähaaralle päästään $2\pi : n$ monikertaa vaille.)

Jaettaessa vastaavasti jaetaan ja vähennetään.

Potenssit, De Moivre’n kaava

Yllä olevasta kertolaskuperiaatteesta seuraa heti:

$$z^n = r^n(\cos n\,\varphi + i\,\sin n\varphi).$$

Erityisesti valitsemalla $r = 1$, saadaan *De Moivre’n* kaava:

$$(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = (\cos n\,\varphi + i\,\sin n\varphi).$$

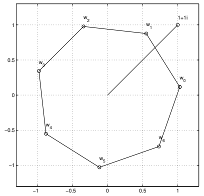
Juuret

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Annettu $z \in \mathbb{C}$, määrättävä w siten, että $w^n = z$. Polaarimuodosta saadaan ratkaisu suoraan.

$\sqrt[n]{z}$ on kompleksiluku w, jolle:

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ arg\, w = \frac{Arg\, z}{n} + k\frac{2\pi}{n}, k = 0, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Jokaisella kompleksiluvulla $z \neq 0$ on n erillistä n:ttä juurta.



Luvun $z = 1 + i$ 7:nnet juuret $w_0, \ldots, w_6$.