Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 1 AV (viikko 38 , 19 – 21.9.2005), **alkuviikko**

Näihin harjoituksiin liittyvää oppimateriaalia:
Pruju: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/kompleksianalyysi_osa1.pdf`
Päivittyy ja tulee Edita-jakoon.Älä printtaa yleisillä!
Oppikirja KRE8 CH 12 pykälät 6,...

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`

Tehtävät alkuviikkolle 38

1. a) Esitä e^z muodossa $u + i\,v$ ja määritä $|e^z|$, kun $z = 2 + 3\pi\,i$.
   b) Kirjoita kompleksiluku $1+i$ polaarimuotoon käyttäen eksponenttifunktiomerkintää.
   c) Tee sama juurille $\sqrt[4]{-i}$.
2. a) Osoita, että $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.
   b) Määritä kaikki kompleksiluvut z, joilla $|e^{-z}| < 1$.
3. Piirrä ja selvitä alla olevien kompleksitason käyrien tai alueiden tyyppi/luonne. (Jos olet tehnyt 3 kohtaa, voit merkitä rastin.) a) $Re(z^2) = 1$, b) $\frac{1}{2} < |z - i - 1| < 2$, c) $Im\,\frac{i}{z} \le 2$, d) $|z - i| + |z + i| = 4$.
4. Tarkastellaan kuvausta $w = e^z$. Piirrä alla annetut alueet $z-$tasoon ja niiden kuva-alueet $w-$tasoon. a) $-1 \le x \le 1, \quad -\pi \le y \le \pi$, b) $0 < y < \pi/2$, c) $\ln 0.1 < x < \ln 5$.
5. Määritä pääarvot a) $Log\ (-5)$ ja b) $Log\ (-12 - 16\,i)$
   c) Määritä kaikki arvot $\log e^{-i}$ ja merkitse joitakin tasoon.
6. Piirrä napakoordinaateissa ilmaistu z-tason alue
   $2 \le |z| \le 3, \quad \pi/4 \le \varphi \le \pi/2$ ja sen kuva kuvauksessa $w = Log\ z$.

Ohjeita, määritelmiä, kaavoja, ominaisuuksia

Eksponenttifunktio

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad (z = x + i\,y)$$

Kuvaus $w = e^z$

Jos $x = vakio = c$ ja $y_1 \le y \le y_2$, niin w kulkee pitkin e^c-säteistä ympyräviivaa piirtäen sektorin, jota rajaavat kulmat y_1 ja y_2.

Jos $y = vakio = d$ ja $x_1 \le x \le x_2$, niin w kulkee pitkin puolisädettä, joka muodostaa x-akselin kanssa kulman d, piirtäen säteen osan, jota rajaavat $e^{x_1}-$ ja $e^{x_2}-$ säteiset ympyrät.

Tasokäyristä

Kompleksitason käyrä voidaan usein ilmaista muodossa, jossa esiintyy vaikkapa $|z - z_0|$. Kyseessä on z :n etäisyys z_0 :sta, ja asia ei siitä selkiydy, jos se kirjoitetaan koordinaattimuodossa $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ (pikemminkin päinvastoin).

On toki tilanteita, jolloin koordinaattimuotoa ei voi välttää, vaan esim· ympyrän tapauksessa johdutaan muotoa $x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$. olevaan yhtälöön. Tällöin keskipiste ja säde saadaan neliöiksi täydentämällä. (Kannattaa palauttaa mieleen kouluajoilta, samaa tekniikkaa tarvitaan myöhemminkin mm. Laplace-muunnosten yhteydessä.)

Palautetaan niinikään koulumuisteloista mieleen *ellipsin määritelmä*: Niiden pisteiden joukko, joiden etäisyyksien summa kahdesta kiinteästä pisteestä (polttopisteet) on vakio ($= 2\,a$).

Logaritmi

Eksponenttifunktion käänteisrelaatio (monihaarainen funktio).
$Log\ z = \ln|z| + i\,Arg\,z$; logaritmin päähaara
$\log z = \ln|z| + i\,arg\,z = Log\ z + 2\,n\,\pi\,i, \quad n \in \mathbb{Z}$; logaritmin kaikki arvot.