Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 11 AV/12 LV (viikko 49 , 5 – 9.12.2005)

Tämä on viimeinen varsinainen harjoitustehtäväkokoelma. Viikon 49 harjoitukset pidetään nyt kääntäen niin, että AV on neuvontaharjoitus ja LV on kotilaskuharjoitus. Syy: Itsenäisyyspäivä (ti) tuhoaa useita harjoitusryhmiä. Silloin ti-ryhmäläiset voivat vierailla haluamassaan ryhmässä tiistain komplementissa.

Viimeiset luennot (to–pe 8–9.12) pidetään esimerkki- ja kertauspainotteisina, koska niillä esitettyjä asioita ei ehditä käsitellä harjoituksissa. Näillä luennoilla esitetyt tehtävät rinnastetaan harjoitustehtäviin koevaatimuksissa. Luentotehtäväkooste pyritään jakamaan etukäteen.

Viitteet: KRE Ch 10.6, 11.1 – 11.5, 19.4.

Alkuviikko (Neuvonta)

1. Määritä vaimentamatonta värähtelysysteemiä kuvaavan yhtälön $y'' + \omega^2 y = r(t)$ "tasapainoratkaisu",jolla tässä tarkoitetaan AE:n $y(0) = 0$ toteuttavaa ratkaisua, kun herätteenä $r(t)$ on 4−jaksoinen funktio, joka välillä $[0, 4]$ on $r(t) = \begin{cases} 30, & 0 < t < 2 \\ -30, & 2 < t < 4 \end{cases}$.

   Olkoon $\omega = 3$. Määritä ratkaisusarjan dominoiva komponentti, ts. termi, jonka amplitudi on huomattavasti muita suurempi (jos sellainen on).

   Ohje: Kehitä $r(t)$ Fourier-sarjaksi, etsi sarjan yleistä termiä vastaava diffyhtälön ratkaisu y_n ja muodosta $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

2. (a) Osoita, että funktiot $u_1(x,t) = e^{-\pi^2 c^2 t}\sin(\pi x)$, $u_3(x,t) = e^{-9\pi^2 c^2 t}\sin(3\pi x)$ ja $u = 4\,u_1 - 1/3u_3$ toteuttavat lämpöyhtälön $u_t = c^2 u_{xx}$ alueessa $0 < x < 1$ ja $t > 0$ ja nollareunaehdot (kohdissa $x = 0$ ja $x = 1$) . Hahmottele alkulämpötilan $u(x, 0)$ kuvaaja välillä $0 \le x \le 1$.

3. Ratkaise π:n pituista sauvaa koskeva lämpöyhtälö $u_t = u_{xx}$ $(c^2 = 1)$, kun sauvan päät "upotetaan jäihin" (eli pidetään $0°C$:ssa) ja alkulämpötilajakauma on $f(x) = 50\sin x - 6\sin 2\,x + 8\sin 5\,x$.

   Suorita tehtävä käymällä muuttujanerotteluprosessi alusta alkaen läpi. (Ei tarvitse käyttää aikaa "sen erään vakion"negatiivisuusperusteluun.) Tässä et tarvitse Fourier-sarjaa (miksi?)

4. Kuparisauva $(c^2 = 1.14)$, jonka pituus $L = 10$ cm upotetaan kiehuvaan veteen, kunnes sen lämpötila on kauttaaltaana $100°C$. Hetkellä $t = 0$ sauva otetaan vedestä, lämpöeristetään täydellisesti pituussuunnassa ja sen päät työnnetään jäävesisäiliöihin $0°C$.

   Muodosta sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$.

   Arvioi sarjan ensimmäistä termiä käyttäen, kuinka pitkän ajan t_1 kuluttua sauvan maksimilämpötila (keskipisteen lämpötila) on pudonnut puoleen.

Loppuviikko (Kotilaskut)

1. Sauva, joka on myös päistään lämpöeristetty, johtaa "adiabaattisiin reunaehtoihin": $u_x(0, t) = 0$, $u_x(L, t) = 0$.
   Määritä tällaisen täysin eristetyn, $L = \pi-$pituisen sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$, kun alkuehtofunktio $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$, $x \in (0, \pi)$.

   Määritä ajasta riippumaton tasapainolämpötila $u_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} u(x, t)$.

2. Ohuen neliönmuotoisen kuparilevyn pinnat on lämpöeristetty (reunoja lukuunottamatta). Olkoon neliön sivu $a = 24$. Yläreuna pidetään 20°C-asteessa ja muut reunat 0°:ssa. Määritä tasapainolämpötilajakauma $u(x, y)$, toisin sanoen, ratkaise Laplacen yhtälö $\Delta u = 0$.

3. Olkoon värähtelevän kielen pituus $L = \pi$ pituusyksikköä, ja olkoon aaltoyhtälön vakiokerroin $c^2 = 1$.

   Määritä ratkaisu, jonka alkunopeus = 0 ja alkupoikkeama $u(x, 0) = k\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

   Ohje: Käy kursorisesti läpi muuttujanerotteluvaiheet, yksityiskohtia reunaehtopäättelyiden suhteen ei tarvitse laskea, vaan voit ottaa suoraan kirjasta tai luentomuistiinpanoista tulomuotoiset kantafunktiot $u_k(x, t)$ Paneudu sensijaan huolellisesti alkuehdon määräämiseen. Huomaa, että tässä ei tarvita sarjaa, vaan äärellinen lineaarikombinaatio riittää (ja paistaa läpi).

   Kirjoita lopuksi (trigonometrian kaavoja hyödyntäen) ratkaisu muotoon $\frac{1}{2}(f(x - t) + f(x + t)$.
   (Voit merkitä tehtävän ilmankin tätä loppukaneettia)

4. Olkoon värähtelevän kielen pituus L, ja olkoon aaltoyhtälön c mukana ihan c:nä. Määritä ratkaisu $u(x,t)$, kun alkunopeus $= 0$ ja alkupoikkema $u(x,0) = x(L-x)$

   Suositus: Käytä mielellään MAPLE:a integrointiin, kts. ohjeita.

   Vast: $u(x,t) = \frac{8\,L^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\,\pi\,x}{L} \cos \frac{n\,c\,\pi\,t}{L}$.

5. Kirjoita edellisen tehtävän ratkaisu muotoon
   $u(x,t) = f^*(x-ct) + f^*(x+ct)$, missä f^* on alkuehtofunktion $f(x) = u(x,0)$ pariton $2L$- jaksoinen laajennus.

   Ohje: Käytä tuttuja trigonometrisia kaavoja

6. (a) Muodosta kuvan neliöalueella Laplacen yhtälön $\Delta u = 0$ differenssimenetelmäratkaisun yhtälösysteemi $Au = b$. Tämän ratkaisuvektori $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ antaa siis approksimaatiot ratkaisufunktion arvoille näissä hila(sisä) pisteissä.

   Reuna-arvoina ovat vektorit o, y, v, a (oikea, ylä, vasen, ala).

```
             y1        y2
       |----- o  ----  o ------|
       |                       |
       |                       |
   v2  o     u3        u4      o  o2
       |                       |
       |                       |
   v1  o     u1        u2      o  o1
       |                       |
       |                       |
       |----- o ------ o ------|
             a1         a2
```

   (b) Olkoon kuvan alue neliö $[0,3] \times [0,3]$ ja askel $h = 1$. Olkoot u:n reuna-arvot annettu näin: Vasen reuna: $u = 0$, alareuna: $u = x^3$, oikea reuna: $u = 27 - 9\,y^2$, yläreuna: $u = x^3 - 27\,x$.

   Määritä potentiaalifunktion (tai tasapainolämpötilan) $u(x,y)$ likiarvot sisäpisteissä $(1,1), (2,1), (1,2), (2,2)$.

   Ohje: Saat halutessasi käyttää $4 \times 4-$ yhtälösysteemiin MATLAB:n "takakenoa": `>> u=A\b` tai MAPLE:n `LinearSolve`:a (sitä ennen `with(LinearAlgebra):`), toki symmetrian takia käsinlaskukaan ei ole työläs.

Ohjeita

Aaltoyhtälö (1-ulotteinen): $u_{tt} = c^2\,u_{xx}$ (hyperbolinen)
Lämpö/diffuusioyhtälö (1-ulotteinen): $u_t = c^2\,u_{xx}$ (parabolinen)
Laplacen yhtälö: $\nabla^2 u = 0$ (2- tai 3-ulotteinen) (elliptinen)
Poissonin yhtälö: $\nabla^2 u = f$ (2- tai 3-ulotteinen).
(Muista: $\Delta = \nabla^2$)

LV teht. 4: Ota vaikka mallia tiedostosta:
`http://math.tkk.fi/teaching/k3/05/L/fouriersarjat.html` tai kirjoita MAPLE:lle rohkeasti tyyliin:
`bn:=(1/Pi)*int(f(x)*sin(n*x),x=-Pi..Pi);`
Käsinlaskijalle annamme Maplen generoiman integraalikaavan (tässä jätetään sijoitusten suorittaminen lukijalle):
$\int x\,(L-x)\sin\left(\frac{n\pi\,x}{L}\right) dx = L\left(L^2 n\pi - 2\,n\pi\,xL\right)\sin\left(\frac{n\pi\,x}{L}\right) n^{-3}\pi^{-3} +$
$L\left(-Ln^2\pi^2 x + n^2\pi^2 x^2 - 2\,L^2\right)\cos\left(\frac{n\pi\,x}{L}\right) n^{-3}\pi^{-3}$

Trigonometriaa

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\,\alpha\,\cos\,\beta \pm \cos\,\alpha\,\sin\,\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\,\alpha\,\cos\,\beta \mp \sin\,\alpha\,\sin\,\beta \end{cases}$$

Fourier-kertoimet, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$