Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 10 AV/11 LV (viikko 48 , 28.11 – 2.12.2005)

Viitteet: KRE Ch 19, 10, L/dynumer.mws, L/fouriersarjat.pdf (ps) F-sarjapruju
Maple-ws ja Matlab-pohjia: "Luennot-linkistä

Huom! `L/dynumer.mws` antaa hyvän pohjan Maple-työskentelyyn diffyhtälöiden numeriikassa. Pitäisi sujua aika hyvin ilman Maple-kokemusta modidfioimalla loogisesti. (Myös html-versio, josta voi ainakin lukea.)

Fourier-sarjalaskun tuloksesta pääsee kunnolla nauttimaan vasta, kun sarjan osasummia voi piirtää. Yllä on malleja, joiden avulla homma käy helposti. Jos et ole käyttänyt kumpaakaan (Maple,Matlab), pääset helpommalla tekemällä Maple:lla. Yhtä hyvä vaihtoehto on Mathematica. Toki myös Mathcad:llä pärjäät, jos se on tuttu, tai graafisella laskimellakin ehkä. (Kolmea viimeksi mainittua emme valitettavasti voi tukea mallipohjin.)
Integrointitekniikka tarvitaan Fourier-sarjalaskuissa, se ei tässä ole varsinaisesti harjoittelun aihe (enää). Siksi symbolilaskentaohjelmien käyttö integrointiapulaisina on salittua ja jopa suotavaa. Alla on annettu joitain valmiita integrointikaavoja helpotukseksi puhtaaseen käsinlaskentaan tyytyville. (Perustekniikat, kuten osittaisintegrointi pitää toki osata kokeissa.)

Alkuviikko

1. Laske (käsin) kolme `RK4`-askelta tehtävälle $y' = t + y,\quad y(0) = 1$, kun askel $h = 0.1$. Piirrä pisteet ja murtoviiva.

2. Kirjoita pseudokoodi, jolla voisit laskea RK4-menetelmällä (AA)-tehtävän $y'' + y = 0,\quad y(0) = -1,\quad y'(0) = 0$ ratkaisuapproksimaatiota. Ota mallia tiedostoista `L/dynumer.mws, dynumer.html`. (Saat toki käyttää Maple-syntaksin sijasta Matlab-syntaksia tai omaa "pseudosyntaksiasi".)

   Suorita koodisi ja piirrä. Kokeile esim. askelia $h = 0.8$ ja $h = 0.4$, jälkimmäisellä pitäisi ainakin ympyrän tulla jo varsin tarkkaan. (Koko tehtävälle on hyvänä pohjana `dynumer.mws-` työarkin vastaava Heunille tehtynä.) Jos et "kehtaa" tarttua tietokoneeseen, niin laske jokunen askel käsin.

3. Suorita LV10 teht. 1 (Kettu–jänis) (a) Heunin ja (b) RK4-menetelmällä. Miten pitkällä askeleella ratkaisun luonne tulee näkyviin. Muista, että Eulerilla täytyy mennä luokkaa $h = 10^{-3}$ olevaan.

   Ohje: Tässä(kin) on huomattavaa etua tietokoneohjelmasta, voit toki laskea pari askelta taskulaskimen avulla, saat työstä palkaksesi suorituspisteet. Em. `dynumer.mws` antaa hyvän lähtökohdan tähänkin. Toisaalta annamme myös sopivan Matlab-pohjan sitä kaipaaville.

4. Seuraavat 2π-jaksoiset funktiot on määritelty välillä $[-\pi, \pi]$ alla annetuilla kaavoilla. Hahmottele funktioiden kuvaajat kolmen jaksovälin alueella eli välillä $[-3\pi, 3\pi]$.

   (a) $f(x) = x,\quad (-\pi < x < \pi)$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{kun } 0 < x < \pi \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } -\pi < x < 0 \\ -x^2, & \text{kun } 0 < x < \pi. \end{cases}$

5. Ovatko seuraavat funktio parillisia, parittomia, vai ei kumpaakaan?

   (a) $f(x) = x \cos n\,x$, (b) $f(x) = x^2 \cos n\,x$, (c) $f(x) = \cos x + \sin x$, (d) $f(x) = x^2$, kun $0 < x < 2\pi$, f on $2\pi-$jaksoinen.

6. Olkoon 2π-jaksoinen funktio määritelty jakson pituisella välillä näin:
   $f(x) = \begin{cases} c, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

   Piirrä f :n kuvaaja välillä $[-2\,\pi, 2\,\pi]$. Onko f parillinen, pariton tai ei kumpaakaan?

   Muodosta f:n Fourier-sarja, kirjoita auki osasumma, joka koostuu 3:sta ensimmäisestä 0:sta poikkeavasta termistä: Piirrä, jos voit, tämän osasumman ja muidenkin kuvia samaan kuvaan funktion kuvaajan kanssa.

   Vast(koko sarja): $f(x) \sim \frac{c}{2} + \frac{2c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}$.
   Vihje: Huomaa, että jaksollisen funktion integraali voidaan laskea minkä tahansa välin yli, joka on jakson pituinen.

Loppuviikko

1. Olkoon annettu välillä $[0, 1]$ määritellyt funktiot (a) $f(x) = x^2$, (b) $f(x) = x^3$ ja (c) $f(x) = x\,e^x - e^{-x}$. Muodosta (a)- kohdassa f :n pa-

riton ja (b)-kohdassa parillinen jatke välille $[-1, 1]$. (c)-kohdassa muodosta sekä parillinen että pariton jatke. Kaikissa kohdissa **piirtäminen on pakollista**, toki käsipelikin käy, (c)-kohdassa ehkä laskimella terästettynä.

2. Muodosta funktion $f(x) = x,\ \ 0 < x < L$ (a) parillinen ja (b) pariton jatke välille $[-L, L]$ ja piirrä kummankin $2\,L-$ jaksoinen jatke välillä $[-4L, 4L]$.

   Laske parittoman jatkeen Fourier-sarja.

   Vast: $f(x) \sim \frac{2L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L} - \ldots\right)$

3. Perehdy Fourier-sarjojen suppenemislauseeseen. Huomaa, että välin päätepisteissä pitää tarkastella jaksollista jatketta, sen mukaan määräytyy, onko funktio jatkuva, vai onko sillä hyppäys. Laskemalla funktion arvon (tai keskiarvon) sarjan sopivissa x-pisteissä, saat johdetuksi eräiden sarjojen summakaavoja (joita on vaikea muilla menetelmillä johtaakaan).

   Johda summakaavat:
   (a) $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
   (b) $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$.
   Tätä varten pitää johtaa funktion $f(x) = x^2$ Fourier-sarja välillä $[-\pi, \pi]$. Laskentapisteissä tulee todeta Fourier-sarjojen suppenemislauseen ehtojen toteutuminen.

   Annetaan Fourier-sarja (jonka osaisit laskea, mutta osittaisintegrointien takia se on vähän työläs):

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\,x.$$

Ohjeita

Klassinen Runge-Kutta (RK4)

$$\begin{cases} k_1 = h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) \\ k_2 = h\boldsymbol{f}(t_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = h\boldsymbol{f}(t_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = h\boldsymbol{f}(t_n + h, \boldsymbol{y}_n + k_3) \\ \boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

GKV$= O(h^4)$

Osittaisintegrointia Maple:lla:
`int(x*sin(a*x),x);` antaa: $\frac{\sin(ax) - ax\cos(ax)}{a^2}$

`int(x*cos(a*x),x);` antaa: $\frac{\cos(ax) + ax\sin(ax)}{a^2}$

Fourier-kaavoja ja lauseita

Suppenemislause. Olkoon f jaksollinen funktio, jaksona p. Oletetaan, että f on paloittain jatkuva ja että sillä on kaikkialla sekä vasemman että oikeanpuoliset derivaatat. Tällöin f:n Fourier-sarja suppenee kaikissa pisteissä x kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x))$. Siten kaikissa pisteissä x, joissa f on jatkuva, sarja suppenee kohti funktion arvoa $f(x)$.

Huom 1 Vasemmanpuolinen derivaatta tarkoittaa tässä yhteydessä erotusosamäärän vasemmanpuolista raja-arvoa, kun laskentapisteenä on funktion vasemmanpuolinen raja-arvo. Oikeanpuolinen vastaavasti. Niinpä esim. Heavisiden funktiolla on origossa vp. ja op. derivaatta tässä mielessä $= 0$. ”Normaalin”puhetavan mukaan funktio olisi siten derivoituva ja erityisesti jatkuva 0:ssa, mikä viimeistään paljastaa, että puhetapamme on normaalista poikkeava.

Fourier-kertoimet, f määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

Nämä kaavat annetaan kokeissa.