Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3 syksy 2004

KOMPLEKSILUVUT JA -FUNKTIOT

HEIKKI APIOLA, TKK/MATEMATIIKAN LAITOS

Päivitetty 16. syyskuuta 2004

Sisältö

Johdanto ii
1. Kompleksiluvun määritelmä ja perusominaisuudet 1
1.1. Kompleksiluvun määritelmä 1
1.2. Luku i, esitys $z = x + iy$, kompleksitaso 1
1.3. Aritmetiikkaa kompleksiluvuilla, liittoluku ("complex conjugate"), moduli 2
2. Polaarimuoto 5
2.1. Kolmioepäyhtälö, liittolukuominaisuuksia 6
3. Kerto-ja jakolasku polaarimuodossa 8
3.1. Potenssit, De Moivre'n kaava 9
3.2. Kompleksiluvun juuret 9
3.3. Ykkösen n:nnet juuret 11
3.4. Kertolaskun geometrinen merkitys 12
4. Eksponenttifunktio 13
4.1. e^z:n välittämä kuvaus 14
4.2. Jaksollisuus,perusalue 16
5. Logaritmi ja yleinen potenssi 17
5.1. Logaritmi 17
5.2. Yleinen potenssi 18
6. Trigonometriset ja hyperboliset funktiot 20

Kirjallisuutta, muuta materiaalia, linkkejä

[KRE8] E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley, 8. painos, pykälät 12.1–12.8.
[AG] Simo Kivelä: Algebra ja geometria, Otakustantamo (Vain kompleksiluvun määritelmä, ja perusfunktiot)

Kurssisivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentomateriaalia: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/04/L/`.

Tekstiin liittyvät MATLAB-"skriptit"(eli komentotiedostot) ovat kaikki saatavissa sivulta `www.math.hut.fi/teaching/k3/04/L/matlab/`. Sieltä löytyvät mm. kaikki kuvien tekemiseen käytetyt skriptit.

Tämä pruju on hiukan modifioitu versio viime syksyn vastaavasta. Tästä puuttuu analyyttisten funktioden osuus, joka tällä kertaa kuuluu kurssiin. Siihen liittyvää kirjoittelen:
`www.math.hut.fi/teaching/k3/04/L/2CApruju.pdf`

JOHDANTO

Tarve reaalilukuja laajempaan lukujoukkoon syntyi tarpeesta ratkaista polynomiyhtälöitä. Yksinkertaisin tällainen yhtälö lienee

$$x^2 = -1$$

Historian kirjoihin on jäänyt ensimmäisenä "kompleksilukuja"tarvinneena matemaatikkona *Cardano*(1501-1576), jonka sanotaan johtaneen kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan. Itse asiassa kunnia kuulunee toiselle italialaiselle miehelle nimeltään *Niccolo Fontana alias Tartaglia* (1499-1557). Lue asiaan liittyvä kiehtova tarina tästä:
`http://solmu.math.helsinki.fi/2000/2/saksman/`

Kompleksilukujen nimi ja systemaattinen käyttöönotto on peräisin *Gauss*:lta (1777-1855), kts.
`http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/html/ranska/index.html#gauss_`

Motivaatio

- "Perustason tehtävät". Tällaisia ovat esim. vaihtovirtapiirilaskut sähköopissa, mekaaniset värähtelevät systeemit, ym. Näihin riittävät kompleksilukujen perusominaisuudet, polaarimuoto, De Moivre'n kaava jne.
- Vaativammat tehtävät, joissa tarvitaan analyyttisten ja harmonisten funktioiden ominaisuuksia. Monet virtausdynamiikan, lämpöopin ja sähköstatiikan tehtävät kuuluvat sovellutusten piirin.
- Vaikka alkuperäinen tehtävä olisikin reaalialueella muotoiltu, voidaan ratkaisussa joutua kompleksialueelle (esim. ominaisarvotehtävät).
- Monet käsitteet saadaan esitetyksi yhtenäisemmässä ja helpommassa muodossa (esim. Fourier-sarjat ja -muunnokset) ja moni puhtaasti reaalifunktioihin liittyvä ilmiö voidaan oikeasti "ymmärtää"vasta kompleksialueella tarkasteltuna.

1. Kompleksiluvun määritelmä ja perusominaisuudet

1.1. **Kompleksiluvun määritelmä.** Selkeintä on määritellä kompleksiluvut reaalilukupareina. Tällöin kaikki rakentuu vanhojen tuttujen käsitteiden varaan, eikä mitään "mystistä, imaginaarista oliota" tarvitse ulkoapäin tuoda mukaan (kuten joissain esityksissä tehdään).

Noudatamme mm. kirjoissa [KRE] ja [AG] esiintyvää tyyliä.

Määritelmä 1.1. *Kompleksiluku* $z = (x, y)$ on reaalilukupari.
Kompleksilukujoukko on reaalilukuparien joukko $\mathbb{R}^2$ varustettuna seuraavilla laskutoimituksilla:

- Yhteenlaskulla: $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Kertolaskulla: $z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Kompleksilukujoukolle käytetään merkintää $\mathbb{C}$

Huomautus 1.1. Joukkona $\mathbb{C}$ on sama kuin $\mathbb{R}^2$. Merkintä $\mathbb{C}$ viittaa siihen, että käytössä on myös yllä määritelty kertolasku.

Reaaali- ja imaginaariosa Kompleksiluvun $z = (x, y)$ x-koordinaattia sanotaan reaalioasaksi ja y-koordinaattia imaginaariosaksi. Merkitään:

$$x = Re\ z, \quad y = Im\ z$$

Kompleksilukujen kertolasku voidaan muistaa näin:

Tulon reaaliosa $= ReRe - ImIm$ (Reaaliosien tulo - imaginaariosien tulo)
Tulon imaginaariosa $= ReIm + ImRe$. (Ristiinkerrottujen tulojen summa.)

1.2. **Luku i, esitys $z = x + iy$, kompleksitaso.** Koska kompleksilukujoukko on vanha tuttu taso $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, voimme havainnollistaa geometrisesti.

Kurssilla käytettäväksi ohjelmaksi olemma valinneet Matlab:n. Siksi teemme myös kaikki kuvat sillä, ja esittelemme Matlab-työskentelyä käsiteltävien aiheiden yhteydessä. Matemaattisen juonen seuraamisen helpottamiseksi ja esteettis-hygieenisistäkin syistä emme kuitenkaaan "pakota" lukijaa katselemaan koodeja. Sensijaan annamme viitteet, joista Matlab:sta kiinnostunut lukija voi koodit hakea. Joitakin lyhyitä Matlab-sessioita otamme tekstiin mukaan.

Muistutamme, että Matlab:ia voi opiskella mm. viitteestä

`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/}`

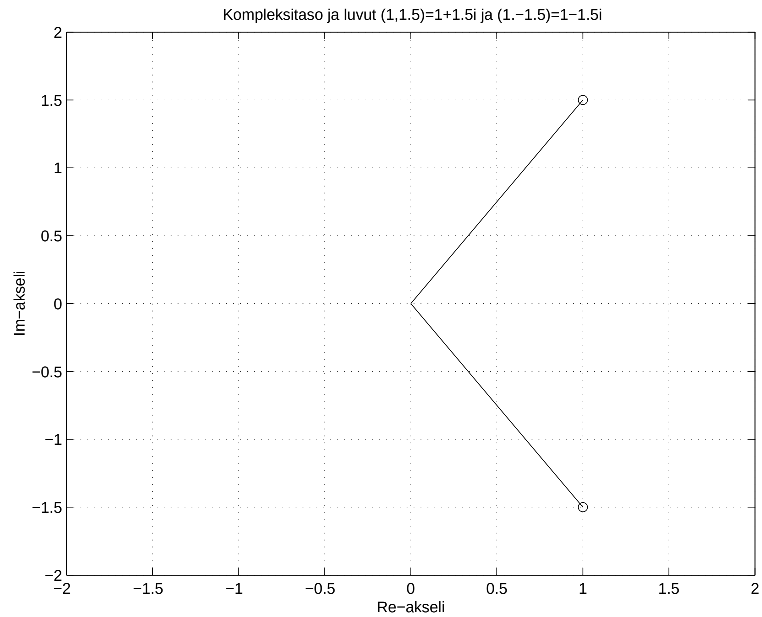
Matlab-skripti: `liittoluku.m`

Jokainen $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ voidaan esittää $\mathbb{R}^2$:n kannan $\{(1, 0), (0, 1)\}$ avulla muodossa

$$z = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Suoritetaan samaistus $(x, 0) \leftrightarrow x$. Tämä merkitsee vain sitä, että laskiessamme "reaalisilla kompleksiluvuilla", tulos on sama, laskimmepa kummalla tavalla tahansa.

Imaginaariyksikkö(vektori) i



KUVA 1. Luku ja liittoluku kompleksitasossa

Merkitään erityisesti symbolilla i kompleksilukua $(0,1)$. Edellä oleva esitys voidaan siten kirjoittaa muotoon:

$$z = x + yi.$$

Tässä, kuten aina jatkossa, samaistamme: $(1,0) = 1$, ja yleisesti $(x,0) = x$. Nyt saamme kaipaamamme laskusäännön:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (\mathit{ReRe}\text{-}\mathit{ImIm}, \mathit{ReIm}{+}\mathit{ImRe}) = (-1,0) = -1$$

Kaikki mystiikka salaperäisen "imaginaarisen" i:n ympäriltä on näin hälvennyt!

Toisin sanoen:

Laajennettuamme reaalilukujoukon tasoksi $\mathbb{C}$ ja määriteltyämme siinä laskutoimitukset (erityisesti kertolaskun) sopivasti, löysimme tästä laajennetusta joukosta $\mathbb{C}$ alkion i, joka toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$. Tämän laajennetun joukon alkioita kutsutaan *kompleksiluvuiksi*.

Johtopäätös: Kompleksiluvut eivät ole hiukkaakaan "vähemmän reaalisia" kuin reaaliluvut.

1.3. **Aritmetiikkaa kompleksiluvuilla, liittoluku ("complex conjugate"), moduli.** On helppo tarkistaa, että kompleksilukujen laskutoimitukset noudattavat samoja perussääntöjä (vaihdanta- liitäntä- ja osittelulait) kuin reaalilukujen. Kun käytetään esitystä $z = x + iy$, voidaan laskea aivan, kuten reaaliluvuilla. Sievennyksissä käytetään luonnollisesti hyväksi yhtälöä $i^2 = -1$.

Liittoluku $\overline{z}$

Jos $z = x + iy$, niin merkitään $\overline{z} = x - iy$ ja sanotaan: $\overline{z}$ on z:n *liittoluku* ("complex conjugate").

Geometrisesti kyse on z:n symmetrisestä pisteestä reaaliakselin suhteen (kts. kuva 1).

Välittömästi nähdään (sekä algebrallisesti että geometrisesti), että

$$
\begin{aligned}
z + \overline{z} &= 2 \operatorname{Re} z \\
z - \overline{z} &= 2i \operatorname{Im} z.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Itseisarvo eli moduli

Kompleksiluvun $z = x + iy$ *moduli* eli itsesisarvo on pisteen (x, y) euklidinen etäisyys origosta, eli vektorin $x + iy$ pituus. Toisin sanoen

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Laskemalla:

$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2,$

saadaan monessa yhteydessä käyttökelpoinen kaava:

$$z\overline{z} = |z|^2, \tag{1.2}$$

(Huomaa, että kompleksiluvuilla $|z|^2$ ja z^2 ovat eri asioita.)

Rationaalilausekkeen saattaminen muotoon $x + iy$ nimittäjän liittoluvulla laventamalla

Kun kerromme nimittäjän liittoluvullaan, saamme uuden nimittäjän, joka kaavan (1.2) mukaan on reaalinen, jolloin rationaaliluvun saattamiseksi muotoon $x + iy$ tarvitsee vain kertoa kaksi kompleksilukua keskenään ja jakaa nimittäjässä olevalla reaaliluvulla.

Esimerkki 1.1. Muodostetaanpa lukujen $z_1 = 8 + 3i$ ja $z_2 = 9 - 2i$ osamäärä.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(8+3i)(9+2i)}{9^2+4^2} = \frac{66+43i}{85} = \frac{66}{85} + i\frac{43}{85} \tag{1.3}$$

Sama Matlab:lla

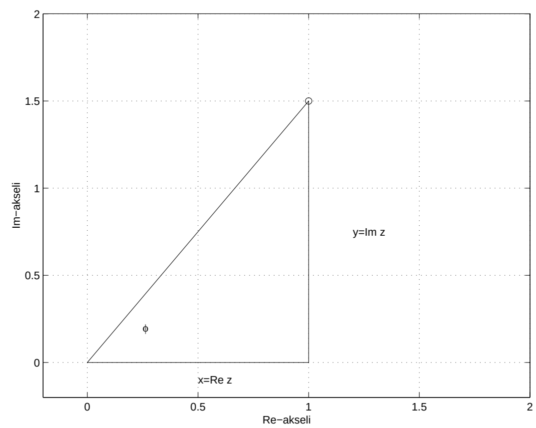
```
» format rational   % Matlab laskekoon rationaaliaritmetiikalla.
» format compact    % Tiivis tulostusmuoto.

» z2=9-2*i
z2 =
      9       -    2i
» z1=8+3*i
z1 =
      8       +    3i
» z2=9-2*i
z2 =
      9       -    2i
» z1/z2
ans =
    66/85     +   43/85i
```

Matlab siis tekee tällaiset sievennykset automaattisesti.

Samoin tekee Maple, jolle voi myös antaa lukuja symbolisessa muodossa. Tällöin komento `evalc` tekee yleensä hyvää työtä kompleksilukusieventäjänä.

2. Polaarimuoto

(Skripti: `kuvapolar.m`)



Kuva 2. Kompleksiluku napakoordinaateissa

Kompleksiluku $z = x + iy = (x, y)$ on tason $\mathbb{R}^2$ piste, joka voidaan esittää napakoordinaateissa (ϕ, r):

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Tässä siis $r = |z|$. Napakulmaa ϕ sanotaan kompleksiluvun z *argumentiksi*. Annetun kompleksiluvun argumentti on määrätty 2π:n monikertaa vaille. Argumentille sovitaan *päähaara*, jota merkitään *Arg*. Sovimme päähaaraksi:

$$-\pi < Arg\, z \leq \pi.$$

Tämä lienee yleisimmin käytössä oleva sopimus. Sitä käytetään myös [KRE]-kirjassa.

Muitakin esiintyy. Toinen tavallinen on väli $(0, 2\pi]$ (tai $[0, 2\pi)$).

Merkinnällä $arg\, z$ tarkoitamme jotain argumentin "haaraa", siten

$$arg\, z = Arg\, z + 2n\pi \quad \text{jollain } n \in \mathbb{Z}.$$

Esimerkki 2.1. Olkoon $z = 1 + i$. Laskettava moduli ja argumentti.

$|z| = \sqrt{2}$, $Arg\, z = \pi/4$, $arg\, z = \pi/4 + 2n\pi$ (jokin n).

(Matlab-lasku ja kuva, jossa koordinaatistoneljännekset merkitty: `kuvapolar.m`)

Saadaanko $Arg\, z$ yleisesti kaavasta $\overline{\arctan}\frac{y}{x}$, kuten tässä? (Yläviiva tarkoittaa arkustangentin päähaaraa.)

No ei saada, sillä luvun $-1-i$ argumentti $= -3\pi/4 = \overline{\arctan}\frac{-1}{-1} - \pi$.

Yleisesti

$$Arg z = \overline{\arctan}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \pm k\pi, \text{missä} \quad k \in \{0, 1, -1\}.$$

Luku k määräytyy koordinaattineljänneksen mukaan.

Argumentin määrääminen:

Käsin laskiessa on yksinkertaisinta toimia näin: 1. Katsotaan kuvasta, mihin koordinaattineljännekseen annettu kompleksiluku kuuluu. 2. Määrätään tähän neljännekseen kuuluva kulma ϕ, jolle $\tan\phi = y/x$.

Reaali- ja imaginaariosan merkit määräävät neljänneksen, sen perusteella on helppo ohjelmoida yllä oleva kaava funktioksi, joka laskee Arg z:n. Niin on tehty mm. MATLAB:ssa ja MAPLE:ssa. Edellisessä funktio `angle` ja jälkimmäisessä `argument`.

Tässä asiaa valaiseva MATLAB-istunto:

```
z1=1+i; z2=-1+i; z3=-1-i; z4=conj(z1); % conj = liittoluku
angle([z1 z2 z3 z4])
```

Tuloksena:

```
    0.7854    2.3562   -2.3562   -0.7854
```

Tehtävä 2.1. Tee yllä oleva käsin, piirrä pisteet tasoon ja laske kunkin argumentti vaikkapa laskimesi `arctan`:n avulla.

2.1. **Kolmioepäyhtälö, liittolukuominaisuuksia.** Liittoluvuilla operoiminen käyttäytyy kauniisti kaikkiin laskutoimituksiin nähden:

"liittoluku laskutoimituksesta = laskutoimitus liittoluvuista"

Kerätään yhteen nämä ja pari aiemmin esiteltyä ominaisuutta:

Lause 2.1. *Liittolukusääntöjä*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
4. $z\overline{z} = |z|^2$.
5. $\overline{\overline{z}} = z$.

Todistus. Olkoon tavalliseen tapaan $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$.

Kohta 1:

$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Kohta 2:

$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Lasketaan $\overline{z_1}\,\overline{z_2}$ ja katsotaan, olisko se tämän liittoluku.

$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Kyllä on, aivan kuten väitettiin.

Kohta 3 voidaan laskea aika lyhyesti samaan tapaan laventamalla nimittäjän liittoluvulla ja vertaamalla näin saatuja z_1/z_2:n ja $\overline{z_1}/\overline{z_2}$:n lausekkeita.

Kohdan 4 olemme jo laskeneet.

Kohta 5 on vain sitä, että miinus miinus = plus.

□

Lause 2.2 (Seuraus)**.** *Reaalikertoimiselle kompleksimuuttujan polynomille* $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ *pätee:* $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

Todistus. Edellisen lauseen (2.1) perusteella: $\overline{p(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{z} + \ldots \overline{a_n}\,\overline{z}^n$.

Koska kertoimet a_k ovat reaalisia, on $\overline{a_k} = a_k$ kaikilla $k = 0 \ldots n$,

joten viimeksi saatu lauseke on todellakin $p(\overline{z})$. □

Lause 2.3 (Seuraus)**.** *Reaalikertoimisen polyomin nollakohta on joko reaalinen tai kompleksisessa tapauksessa liittolukupari.*

Todistus. Olkoon reaalikertoimisella polynomilla p kompleksinen nollakohta $c = a + ib$, missä $b \neq 0$. Tällöin $p(c) = 0$, joten

$$0 = \overline{0} = \overline{p(c)} = p(\overline{c}).$$

Niinpä $\overline{c} = a - ib$ on myös p:n nollakohta.

□

Tämä seurauslause on tärkeä mm. ominaisarvoteoriassa, palaamme siihen aika ajoin.

Tehtävä 2.2. Osoita, että pariton-asteisella reaalisella polynomilla on ainakin yksi reaalinen nollakohta.

Kolmioepäyhtälö sanoo havainnollisesti, että kolmion sivun pituus on aina korkeintaan kahden muun sivun pituuksien summa. Tämä lausuttuna kompleksitasossa on:

Lause 2.4 (Kolmioepäyhtälö)**.**
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Tod. Ei muuta kuin lasketaan:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = \underbrace{z_1\overline{z_1}}_{|z_1|^2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + \underbrace{z_2\overline{z_2}}_{|z_2|^2}.$$

$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1||z_2|.$

Sitten vain tavallinen binomin neliökaava, niin jopa ollaan perillä. □

3. Kerto-ja jakolasku polaarimuodossa

.

Elämänohje: Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku kannattaa tehdä $(x, y)-$ koordinaattimuodossa, kerto- ja jakolasku polaarimuodossa. Kohta näemme miksi.

Palautamme mieleen trigonometrian perusasioita: sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat. (Nykyisin näiden käyttö lukion matematiikassa lienee jäänyt liian vähälle huomiolle.)

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \end{cases} \tag{3.1}$$

Olkoon $z_j = r_j(\cos\phi_j + i\sin\phi_j), j = 1, 2.$

Muodostetaan tulo:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = \\ &= r_1r_2((\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2)) = \\ &= r_1r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Siispä:

$$\begin{cases} |z_1z_2| = |z_1||z_2| \\ arg(z_1z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Korostuksen vuoksi jälkimmäinen kirjoitetaan usein muotoon:

$arg(z_1z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2 + 2n\pi.$

Sopimuksemme mukaan *arg* viittaa johonkin argumentin haaraan. joten merkintä olisi oikein ilmankin 2π:n monikerran lisäystermiä, mutta on parempi yleensä tottua kirjoittamaan se.

Päähaaran tapauksessa on kirjoitettava:

$$Arg(z_1z_2) = Arg z_1 + Arg z_2 + 2n\pi,$$

missä n on sopivasti valittu kokonaisluku.

Hieman elegantimmin voidaan sama asia kirjoittaa myös näin:

$Arg(z_1z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2 (mod\ \ 2\pi)$, joka voidaan lukea: argumentit ovat samat “modulo 2π” tai “2π:n monikertaa paitsi”.

Esimerkki 3.1. Olkoon $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ja $z_2 = -1 + i$. Kirjoitetaan polaarimuotoon:

$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$,

$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}(\cos\phi + i\sin\phi)$, missä $\phi = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$

Siten $arg(z_1 z_2) = \frac{13\pi}{12}$ (eräs argumentti), ja $Arg(z_1 z_2) = -\frac{11\pi}{12}$ (päähaara).

On tietysti aivan selvää, että laskettaessa päähaaran kulmia yhteen, voidaan joutua pois päähaaralta. Laskettiin nyt varmuuden vuoksi konkreettinen esimerkki.

Harjoituksen vuoksi voit tarkistaa, että saat saman tuloksen kertomalla koordinaattimuodossa ja siirtymällä sitten polaarimuotoon.

Jakolasku palautuu edelliseen suoraan, sillä $z = \frac{z_1}{z_2} \iff zz_2 = z_1$.

Tällöin edellisen mukaan $|z||z_2| = |zz_2| = |z_1|$, joten $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, ja

$arg\, z_1 = arg(zz_2) = arg\, z + arg\, z_2$, joten $arg\, z = arg\, z_1 - arg\, z_2$.

Päähaaroille taas (mod 2π).

3.1. **Potenssit, De Moivre'n kaava.**

Huomautus 3.1. Olkoon ω kompleksiluku, jonka moduli (itsesiarvo)= 1. Voidaan siis kirjoittaa $\omega = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Kompleksiluvun z kertominen ω:lla merkitsee z:n kiertämistä kulman α verran. (Itseisarvo kerrotaan 1:llä, napakulmaan lisätään α.)

Kertolaskukaavasta (3.3 sivulla 8) seuraa heti, että jos haluamme laskea kompleksiluvun $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ potenssin, saamme:

$$z^n = r^n(\cos n\,\phi + i\,\sin n\phi).$$

Erityisesti, jos luvun z itseisarvo (moduli) = 1, saadaan

$$\boxed{\textit{De Moivre'n kaava}:\ (\cos\phi + i\,\sin\phi)^n = (\cos n\,\phi + i\,\sin n\phi).}$$

Esimerkki 3.2 (De Moivre'n kaavan käyttö trigonometriassa)**.** Käyttämällä binomikaavaa vasemmalla ja vertaamalla reaaliosia ja imaginaariosia, saadaan moninkertaisten kulmien lausekkeet $\cos n\phi$ ja $\sin n\phi$ lausutuksi $\cos\phi$:n ja $\sin\phi$ potenssien avulla.

Lasketaan esimerkin vuoksi tutut kaksinkertaisten kulmien kaavat. *De Moivre* $\Longrightarrow$

$$\underbrace{(\cos\phi + i\,\sin\phi)^2}_{\cos^2\phi - \sin^2\phi + 2i\cos\phi\sin\phi} = (\cos 2\,\phi + i\,\sin 2\phi).$$

Vertaamalla reaaliosia ja imaginaariosia, saadaan tutut kaavat:

$$\begin{cases} \cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi \\ \sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi. \end{cases}$$

Tehtävä 3.1. Laske vastaavasti muita kaavoja, kuten kolminkertaisten, nelinkertaisten, jne kulmien kaavat.

3.2. **Kompleksiluvun juuret.** Kun on määrättävä n:s juuri annetusta kompleksiluvusta z, on tehtävänä ratkaista w yhtälöstä.

$$w^n = z.$$

Tiedämme jo reaalilukujen laskennosta, että ratkaisu ei aina ole yksikäsitteinen. Jos vaikka $z = 4$, niin (reaaliset) ratkaisut ovat $w = \pm 2$. Toisin sanottuna: *Reaalisella neliöjuurifunktiolla on kaksi haaraa, positiivinen ja negatiivinen.*

Mikä vielä pahempaa, negatiivisille luvuille z ei ratkaisuja reaalilukujoukosta löydy lainkaan. Tämähän oli lähtökohtana komplesilukuleikillemme.

No mitä nyt tässä uudessa leikkikehässämme saamme aikaan?

Kirjoitetaan annettu kompleksiluku z ja ratkaistava luku w polaarimuodossa

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\Theta + i\sin\Theta) \\ w &= R(\cos\phi + i\sin\phi). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nyt pätee $w^n = z \iff$

$$R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\Theta + i\sin\Theta).$$

Kompleksiluvut yhtyvät, jos ja vain jos modulit ovat samat ja argumentit yhtyvät mahdollisesti 2π:n monikertaa paitsi. Siis yhtälömme on yhtäpitävä tämän kanssa:

$$\begin{cases} R^n = r \\ n\phi = \Theta + k2\pi, \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} R = \sqrt[n]{r} \\ \phi = \frac{\Theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, k = 0, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Tässä k:n arvot n:stä eteenpäin toistavat samoja ϕ:n arvoja.

Sillä jos $k = n + j$, missä $j = 0, 1, 2, \ldots$, niin

$k\frac{2\pi}{n} = (n+j)\frac{2\pi}{n} = 2\pi + j\frac{2\pi}{n}$.

Saadaan siis tasan n kappaletta annetun luvun z n:nsiä juuria.

Geometrisesti juuret sijaitsevat $\sqrt[n]{|z|}$-säteisen säännöllisen n-kulmion kärkipisteinä, jonka "alkupiste" on kulman $\frac{Arg\, z}{n}$ määräämässä pisteessä, ts. pisteessä, jonka napakoordinaatit ovat

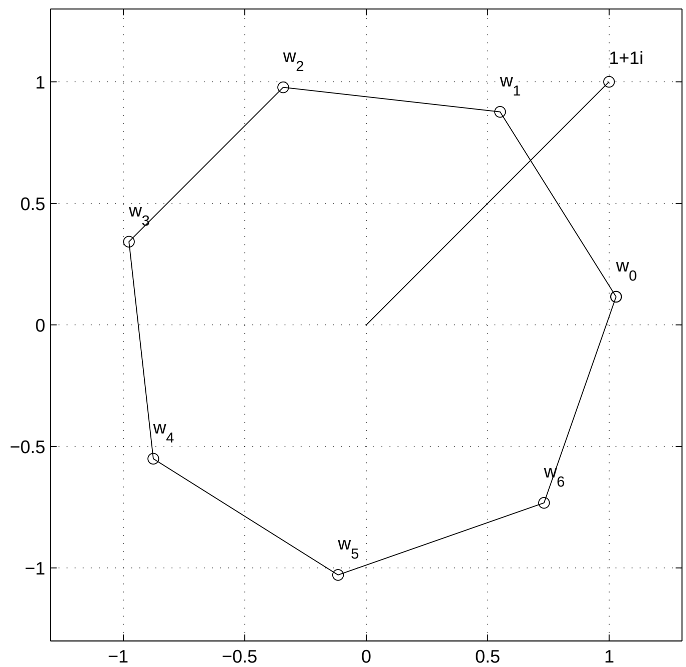
$$(\sqrt[n]{r}, \Theta/n).$$

Esimerkki 3.3. Muodostetaan kaikki juuret $\sqrt[7]{1+i}$

Kirjoitetaan luku $z = 1 + i$ polaarimotoon. $r = \sqrt{2}$, $\Theta = \frac{\pi}{4}$, joten $R = \sqrt[14]{2}$ ja

$$\phi_k = \frac{\Theta}{7} + k\frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{28} + k\frac{2\pi}{7}, \quad k = 0, \ldots, 6$$

Kuva saadaan MATLAB-skriptillä: `esim7juuri.m`, kts kuva 3.



KUVA 3. Luvun $z = 1 + i$ 7:nnet juuret $w_0, \ldots, w_6$.

Huomautus 3.2. (MATLAB-opinhaluisille) Yllä olevassa Matlab-skriptissä olennaista oli juurien w_j laskeminen. Teimme sen "analyyttisesti" juurikaavan mukaan, mikä tukee tässä opetettavaa asiaa. Toisaalta Matlab:ssa on yleinen polynomiyhtälöiden numeerinen ratkaisija, jolla numeeriset approksimaatiot saataisiin vielä vähemmällä vaivalla.

Matlab käsittelee polynomia $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ kertoimien muodostamana vektorina $[a_n, \ldots, a_1, a_0]$. Matlab-funktio `roots` ratkaisee numeerisesti (kompleksitasossa) polynomiyhtälön $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$. Komennon syntaksi on `roots(kerroinvektori)`, missä kerroinvektori annetaan korkeimman asteisesta alimpaan. Yllä olevan esimerkin olennainen laskenta (`w`-vektorin laskeminen) voitaisiin siten tiivistää muotoon:

```
ww=roots([1 0 0 0 0 0 0 -1-i])
```

Kyseessähän ovat polynomin $z^7 - (1 + i)$ nollakohdat.

M-tehtävä 3.1. *Suorita tekstissä oleva Matlab-istunto ja yllä oleva Matlab-komento. Vertaa tuloksia piirtämällä samaan kuvaan päällekkäin. Piirrä* `ww`*- vektorin alkiot vaikka sinisellä tähdellä* (`'*b'`)*.*

3.3. **Ykkösen n:nnet juuret.** $\sqrt[n]{1}$

Erityisesti luvun 1 n:nnet juuret ovat reaaliakselin yksikköpisteestä (ykkösestä) alkavan säännöllisen n-kulmion kärkipisteet.

Merkitään $\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ ja

$\omega_{n,k} = \cos k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n}$.

Tällöin $\omega_{n,k} = (\omega_n)^k$.

Nämä luvut tulevat siellä täällä vastaan matematiikan poluilla, mm. johdettaessa nopean Fourier-muunnoksen (FFT) algoritmia.

3.4. **Kertolaskun geometrinen merkitys.** Ajatellaan erityisesti kertomista luvulla w, joka on yksikköympyrän kehällä, eli $|w| = 1$.

Tulo wz merkitsee annetun vektorin z kiertoa kulman $arg(w)$ verran.

Jos $|w| \neq 1$, kyseessä on kierto yhdistettynä venytykseen/kutistukseen.

4. Eksponenttifunktio

[KRE] 12.6, s. 679 ...

Pidämme tunnettuna reaalisen eksponenttifunktion ominaisuuksineen. Käytämme sille tuttua merkintää e^x, missä siis $x \in \mathbb{R}$.

Miten tulisi määritellä e^z, kun z on kompleksiluku? Helpoimmalla pääsemme tällä määritelmällä:
Määritelmä 4.1. Olkoon $z = x + iy$, asetetaan

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{4.1}$$

Tässä siis e^x tarkoittaa entuudestaan tunnettua reaalista eksponenttifunktiota.
[1]

e^z:n ominaisuuksia

1. Jos $z \in \mathbb{R}$, niin e^z yhtyy reaaliseen exp-funktioon. Sillä tällöinhän $z = x + 0i = x$, joten määritelmän mukaan $e^z = e^x$, missä edellinen tarkoittaa kompleksista ja jälkimmäinen reaalista exp-funktiota.
2. Jos z on "puhtaasti imaginaarinen", ts. $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, niin $e^z = e^{iy} = \cos y + i\sin y$.
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
4. $\frac{d}{dz}e^z = e^z$

Kohdan 3 perustelu. Olkoon $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

[1] Huom! Exp-funktio voitaisiin määritellä samalla potenssisarjalla, joka pätee reaalialueella. Tällöin ei tarvitsisi tietää mitään reaalisen exp-funktion ominaisuuksista. Palataan aiheeseen matriisiexp-funktion yhteydessä.

Tässä käytimme reaalisen exp-funktion vastaavaa tunnettua ominaisuutta ja toisaalta edellä laskettua sääntöä: "Tulon argumentti = argumenttien summa", joka seuraa kosinin ja sinin yhteenlaskukaavoista, kuten muistanemme (3.3 sivulla 8).

Derivoimiskaavan perustelun jätämme tuonnemmaksi, koska emme vielä ole käsitelleet derivointia kompleksimuuttujan suhteen.

□

Eulerin kaava[2]

Tällä nimellä tunnetaan kohdan 2 ominaisuus:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Voidaan sanoa, että määrittelimme eksponenttifunktion niin, että se toisaalta yhtyy reaaliakselilla entuudestaan tunnettuun reaaliseen exp-funktioon, ja toisaalta toteuttaa puhtaasti imaginaarisella argumentilla *Eulerin kaavan.*

Nyt voimme kirjoittaa kompleksiluvun polaariesityksen lyhyemmin:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}.$$

Erityisesti $i = e^{i\pi/2}, -1 = e^{i\pi}, -i = e^{-i\pi/2}$.

Muista ajatella kompleksilukuja geometrisesti!

4.1. **e^z:n välittämä kuvaus.** Kuten olemme jo todenneet, ja kuten tulemme monesti vielä toteamaan, kompleksifunktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ määrittelee kuvauksen (voidaan oikeammin sanoa: "on kuvaus") kompleksitasosta tai sen osajoukosta kompleksitasoon.

Tässä käsittelemme exp-funktiota ja katsomme, miten sen "kuvaajaa" voi luonnehtia.

Voisimme aloittaa valitsemalla joukon $z-$pisteitä kompleksitasosta, joita merkitsimme vaikka $\circ$:llä ja laskemalla kuvapisteet $w = e^z$. Niitä merkittäisiin vaikka punaisella $\star$:lla.

Teepä ihan huvin vuoksi ruutupaperille, jos siltä tuntuu!

Tästä ei "kuvaaja"vielä oikein hahmotu .

Systemaattisemmin pääsemme hommaan kiinni tutkimalla, miten koordinaattiviivat kuvautuvat. MATLAB on tässä hyvänä apuna, näytetään tässä tulos.

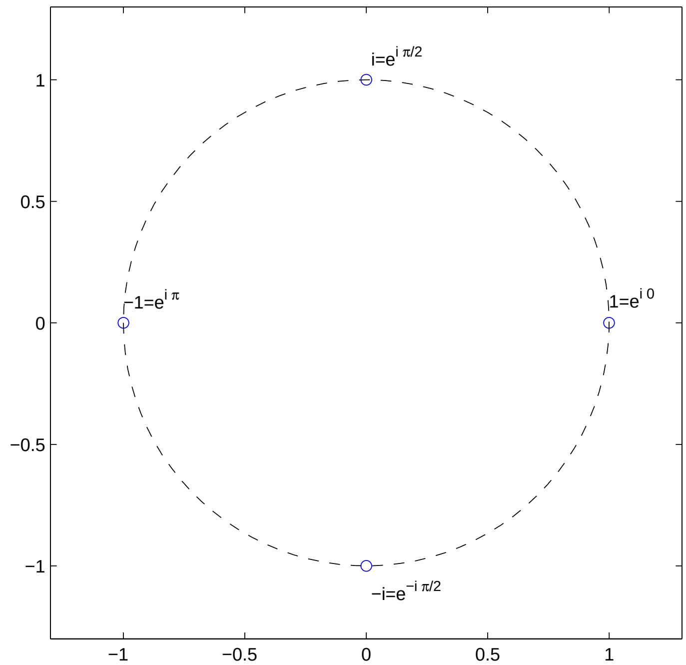
Matlab-skripti ja kuvat (värillisinä) `...03/L/CA1.html`.

Kuvassa 6 näkyvä käytös voidaan päätellä suoraan exp-funktion määritelmäätä:

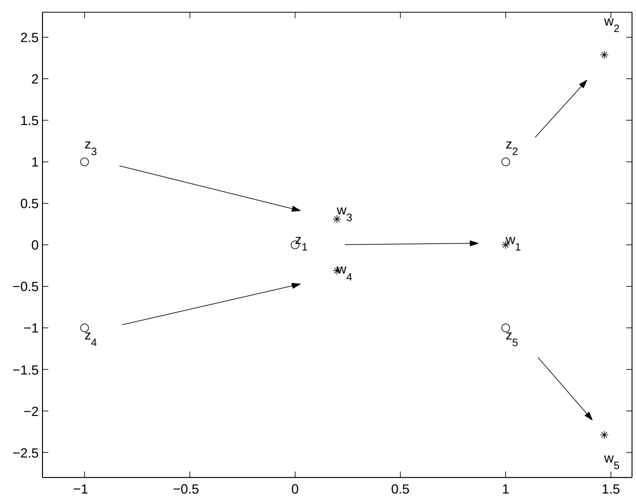
$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Merk $w = e^z$. Määrittelykaavasta näkyy heti:

[2]Euler oli sen luokan nero, että matematiikassa on koko joukko "Eulerin kaavoja". Tämä on ehkä niistä eniten siteerattu. Tällä kurssilla tulemme kohtaamaan muita samannimisiä mm. Fourier-sarjojen yhteydessä. (Sama ilmiö koskee esim. Newtonia)

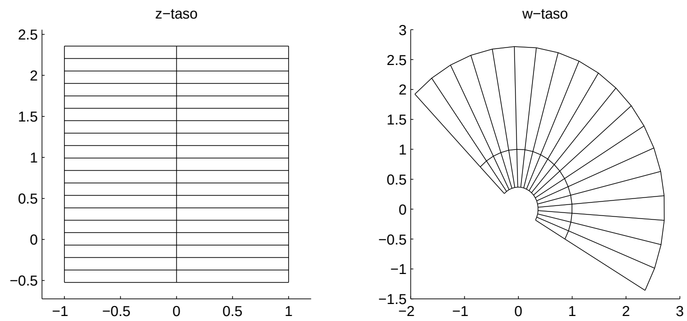


KUVA 4. Luvut $1 = e^{i0}, i = e^{i\pi/2}, -1 = e^{i\pi}, -i = e^{-i\pi/2}$



KUVA 5. Muutaman pisteen kuva exp-kuvauksessa

- Jos $x = vakio = c$ ja $y_1 \leq y \leq y_2$, niin w kulkee pitkin e^c-säteistä ympyräviivaa piirtäen sektorin, jota rajaavat kulmat y_1 ja y_2.
- Jos $y = vakio = d$ ja $x_1 \leq x \leq x_2$, niin w kulkee pitkin puolisädettä, joka muodostaa x-akselin kanssa kulman d, piirtäen säteen osan, jota rajaavat $e^{x_1}-$ ja $e^{x_2}-$ säteiset ympyrät.
- Mitä kauempana vasemmalla pystyjanamme sijaitsee, sitä pienemmän O-keskisen ympyräviivan (osan) vastaava $w-$käyrä piirtää. Pieni reikä origon ympärille aina jää, sillä $|w| = e^x$, joka ei saa arvoa 0, olipa x kuinka negatiivinen tahansa.



Kuva 6. e^z kuvaa pystyviivat ympyränkaariksi ja vaakaviivat "sädejanoiksi"

- Vastaavasti positiivisella puolella saadaan miten suuria ymyröitä vain ikinä halutaan. Ympyröiden säteet kasvavat jopa eksponentiaalisesti x:n suhteen.

Yllä piirretyssä kuvassa z-tason hilaviivat on valittu tämä huomioon ottaen "älykkäästi". Turha haaskata laskentaruutia suorien piirtämiseen monen pisteen voimin.

Lyhyesti sanottuna siis:

Pystyjanat kuvautuvat **ympyräsektoreiksi**.

Vaakajanat kuvautuvat **puolisäteellä makaaviksi janoiksi**.

4.2. **Jaksollisuus,perusalue.** Koska kosini ja sini ovat $2\pi-$ jaksoisia, niin $e^{i(y+2\pi)} = e^{iy}$. Jos siis $z = x + iy$, niin

$$e^{z+2i\pi} = e^x e^{i(y+2\pi)} = e^x e^{iy} = e^z.$$

Niinpä e^z on $2\pi i-$jaksoinen. Kuvaa katsoessa tämä näkyy niin, että jos jokin pystyjana on 2π:n korkuinen, niin vastaava kuvakaari on koko ympyrä, joten aina $2\pi i$:n lisäyksen jälkeen kuvapiste palaa siihen, mistä lähdettiin.

Jos suoritat Matlab:ssa seuraavat komennot, näet keltaisella täytetyn suorakulmion, jonka korkeus on 2π, ja $-20 \le x \le 20$.

```
clf
v=([-20+i*pi, 20+i*pi,20-i*pi, -20-i*pi])
fill(real(v),imag(v),'y')
axis([-20 20 -10 10])
grid
```

Tämän kuva exp-funktiossa on siis ympyrärengas, jota rajoittavat r_1- ja r_2-säteiset ympyrät, missä $r_1 = e^{-20}$ ja $r_2 = e^{20}$.

Kun annetaan tämän keltaisen vyön ulottua koko reaaliakselin leveydelle, saadaan kuvina kaikki kompleksiluvut lukuunottamatta nollaa. Kun rajoitumme tälle (puoliavoimelle) "keltaiselle"alueelle, kukin kompleksiarvo w saavutetaan täsmälleen kerran. (Mietipä!)

Tässä on sopiva paikka siirtyä tarkastelemaan käänteisfunktiota, logaritmia.

5. Logaritmi ja yleinen potenssi

5.1. **Logaritmi.** [KRE] 12.8.

Olemme todenneet, että exp-funktio kuvaa 2π:n korkuisen vyön:

$$V = \{z = x + iy | x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi]\}$$

bijektiivisesti kompleksitasolle, josta on origo poistettu. (Puhumme O:ssa punkteeratusta tasosta). Niinpä sillä on käänteiskuvaus, jonka määrittelyjoukko on $W_0 = W \backslash 0$.

Saamme siten kuvauksen

$$Log : W_0 \longrightarrow V.$$

Esimerkki 5.1. (KRE8 Exa 1 s. 681) Haluamme määrätä kompleksiluvun $3 + 4i$ logaritmin. Toisin sanoen on ratkaistava z yhtälöstä

$$e^z = 3 + 4i.$$

Olkoon $z = x + iy$, tällöin

$$e^x e^{iy} = 3 + 4i = 5e^{i\phi},$$

missä

$$\phi = arg(3 + 4i) = \overline{\arctan}\,(4/3),$$

missä yläviiva viittaa arkustangentin päähaaraan. (Muistathan, että argumentti ei automaattisesti ole sama kuin arkustangentin päähaara, tässä tapauksessa se on siksi, että piste $3 + 4i$ on ensimmäisessä koordinaattineljänneksessä.)

Siis on oltava

$$e^x = 5, y = \phi + 2n\pi \tag{5.1}$$

Jos käänteisfunktion arvo valitaan jaksovyöstä V, on $y = \phi$, joten

$$Log(3 + 4i) = \ln 5 + i\,\overline{arctan}\,\frac{4}{3}.$$

Jos merkitsemme $\log(3 + 4i)$:llä mitä tahansa yhtälön ratkaisua, saamme:

$$\log(3 + 4i) = \ln 5 + i(\overline{arctan}\,\frac{4}{3} + 2n\pi).$$

Saimme laskusäänön logaritmeille:

- Laske luvun (tässä $3 + 4i$) itseisarvo (moduli) ja ota sen logaritmi (ln). Näin saat logaritmin reaaliosan.
- Laske luvun $(3 + 4i)$ argumentti, se antaa logaritmin imaginaariosan. (Argumentin päähaara antaa logaritmin päähaaran.)

Lasketaan Matlabilla:

```
w=3+4*i
itseisarvow=sqrt(3^2+4^2)      % saadaan myös komennolla abs(w)
argumenttiw=angle(w)           % Argumentin päähaara
x=log(itseisarvow)             % Logaritmin reaaliosa (log = ln)
y=argumenttiw                  % Logaritmin imaginaariosa
komplog=log(w)                 % Tarkistetaan Matlabin log:lla sovellettuna
```

```
                                      % suoraan kompleksilukuun.
```

Tässä yllä olevien komentojen tulokset:

```
w =
   3.0000 + 4.0000i
itseisarvow =
     5
argumenttiw =
    0.9273
x =
    1.6094
y =
    0.9273
komplog =
   1.6094 + 0.9273i
```

Siis kaikki toimii, kuten pitää. Näemme, että Matlab:n log-funktio laskee kompleksisen logaritmin päähaaran, kuten luonnollista on.

Huomautus päähaarasta (uudestaan). Käyttämämme (argumentin ja logaritmin) päähaara $[-\pi, \pi)$ on varsin yleisesti käytetty, mutta tämä on sopimuskysymys. Joissakin oppikirjoissa käytetään päähaarana väliä $(0, 2\pi]$ (tai $[0, 2\pi)$).

Tehdään vielä sama lasku uudestaan yleisesti

Haluamme laskea *Logz*:n mielivaltaiselle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Kyseessä on siis yhtälön

$$e^w = z$$

ratkaiseminen w:n suhteen, kun $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ on annettu.

Olkoon $z = re^{i\phi}$, ja merkitään $w = u + iv$. Tällöin siis:

$$e^u e^{iv} = re^{i\phi}.$$

Aivan kuten äsken, näemme, että:

$$u = \ln r, v = \phi = Arg\, z.$$

Muut logaritmin haarat saadaan lisäämällä imaginaariosaan v 2π:n monikertoja.

Matlab-ajo: demolog.m

5.2. **Yleinen potenssi.** [KRE] [12.8 ss. 687–691]

Eksponentti- ja logaritmifunktioiden avulla voidaan määritellä yleinen potenssi, kuten reaalialueellakin. Olkoot z ja c kompleksilukuja ja $z \neq 0$. Määritellään:

$$z^c = e^{c \log z}.$$

Yleisessä tapauksessa saadaan monihaarainen funktio, päähaara saadaan ottamalla logaritmin päähaara *Ln*.

Jos c on kokonaisluku tai yleisemmin rationaaliluku, kyseessä on sama potenssifunktio, jota edellä olemme käsitelleet (kokonaislukupotenssi, juuri tai niiden yhdistelmä).

Tehtävä 5.1. Laske $1^i, i^i, \sqrt[i]{e}, \sqrt[e]{i}$

Ratkaisu: Lasketaan i^i, eli tehtävänä on laskea $e^{i \ln i}$

Lasketaan ensin $\ln i = \ln |i| + i arg i = 0 + i(\pi/2 + 2n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$i \ln i = -\pi/2 + 2n\pi$, joten $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{2n\pi}$.

Päähaara on logaritmin päähaara, joka saadaan n :n arvolla 0, joten i^i:n päähaara-arvo on $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

6. Trigonometriset ja hyperboliset funktiot

Reaaliset sin ja cos voidaan palauttaa eksponenttifunktioon *Eulerin kaavan* avulla: Jos x on **reaaliluku**, niin

$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

Jos nämä lasketaan yhteen ja vähennetään, saadaan heti ratkaistuksi:

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

Nämä kaavat ovat sinänsä hyödyllisiä monessa kohdassa matematiikan kentillä. Aktivoi niiden käyttö!

Tässä käytämme niitä antamaan johtolangan siihen, miten kompleksiargumentin sin $-$ ja cos $-$funktiot tulisi määritellä.

Olemme palauttaneet reaalisen sinin ja kosinin kompleksimuuttujan exp-funktioon. Helppo tapa on määritellä kompleksiset sini ja kosini yksinkertaiseti samoilla kaavoilla, siis antamalla x:n tarkoittaa mielivaltaista kompleksilukua (jolloin merkitsemme sitä mieluummin z:lla). Tällöin ainakin saamme vastaavien reaalialueen funktioiden laajennuksen, koskapa tuo kaava siellä pätee.

Toivottavaa tietysti on, että mahdollisimman paljon sinin ja kosinin tunnetuista ominaisuuksista säilyisi.

Määritelmä 6.1. Olkoon $z \in \mathbb{C}$ Asetamme:

$$\begin{cases} \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \end{cases} \tag{6.1}$$

Voimme nyt tutkia sinin ja kosinin ominaisuuksia, saamme yleisen Eulerin kaavan:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Kiintoisaa on nähdä trigonometristen ja hyperbolisten funktioiden välinen yhteys.

Funktioiden kuvausominaisuuksia voidaan selvitellä.

...

[KRE] [12.7 ss. 682–687]