Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Perämäki

Tentti 2.4. 2005

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

Huomaa, että tehtäväpaperin loppuun on koottu koko joukko ohjeita, kaavoja ym. yleisiä matemaattisia apuneuvoja.

1. (a) Kirjoita kompleksisen eksponenttifunktion määritelmä

   (b) Piirrä z-tasoon suorakulmio $-1 < x < 2, \quad 0 < y < \pi/3 \quad (z = x + iy)$ ja w-tasoon sen kuva kuvauksessa $w = e^z$.

   (c) Osoita, että $f(z) = e^z$ on derivoituva kaikissa kompleksitason pisteissä z, ja määritä derivaatta.

2. Tarkastellaan kompleksitason kuvausta $w = \frac{1}{z}$. Määritä ne $z-$tason käyrät, jotka kuvautuvat suorille Re $w = \frac{1}{2}$ ja Im $w = \frac{1}{2}$. Piirrä kummatkin $z-$ tason käyrät, kuten myös vastaavat $w-$tason suorat ja merkitse, kumpi kuvautuu kummalle.

3. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä

$$y'' + 5y' + 6y = \begin{cases} 3, & \text{kun } 0 \leq t < 6 \\ 0, & \text{kun } t \geq 6 \end{cases}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

4. Ratkaise matriisitekniikkaa käyttäen alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases} \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0.$$

   Kirjoita lopputulos reaaliseen muotoon.

5. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 5 \\ 10 - x, & 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

   (a) Piirrä f:n parillinen ja pariton laajennus ja kummankin $20-$jaksoinen jatke välillä $[-20, 20]$.
   (b) Muodosta parittoman laajennuksen Fourier-sarja ja kirjoita sen osasumma, jossa on 3 ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä.

Perusteita

Osittaisintegrointi: $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big/_a^b u(x)v(x) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Käännä

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s-a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1 s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_r s+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Fourier-sarja

$2L$-jaksoisen funktion f Fourier-sarja:

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$,

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$.