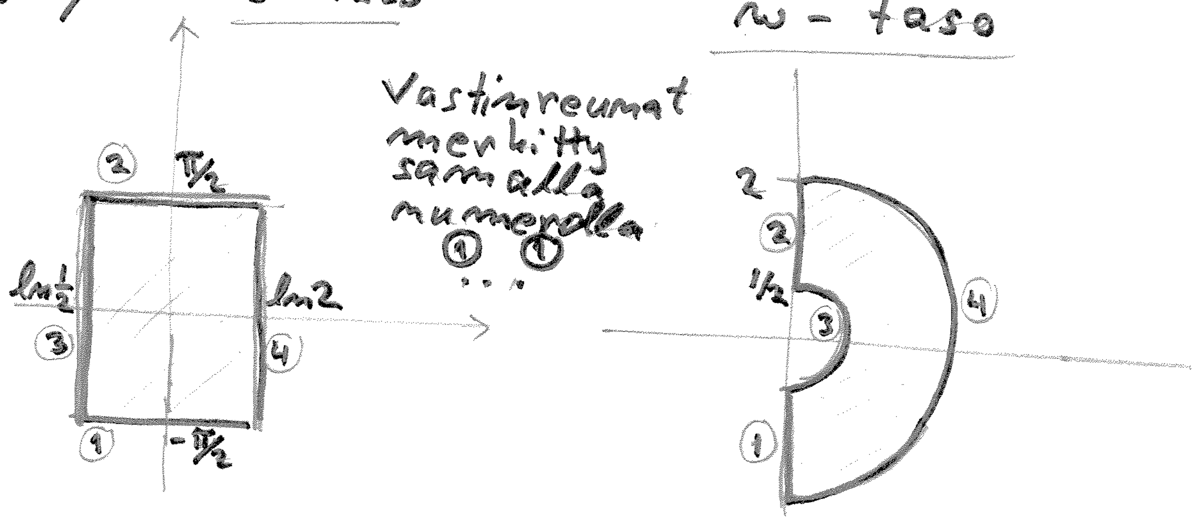
K3/P3 tentti 30.8.04. Ratkaisut HA

1) (a) $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, $z = x+iy$.

(b)



④ $x = \ln 2$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $w = e^z = 2(\cos y + i\sin y)$

$|w| = 2$, $y = \operatorname{Arg} w \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

joten w on ulommalla puoliympyrällä.

③ $x = \ln \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $w = \frac{1}{2}(\cos y + i\sin y)$

$|w| = \frac{1}{2}$, w sisemmällä puoliympyrällä

① $y = -\frac{\pi}{2}$, $\ln\frac{1}{2} < x < \ln 2$ $\Rightarrow$ $y = \operatorname{Arg} w = -\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2} < |w| < 2$

$\Rightarrow$ w on janalla ①

$y = \frac{\pi}{2}$, $\ln\frac{1}{2} < x < \ln 2$ Vastaavasti w on janalla ②

(c) $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, $z = 1 - i$

$\operatorname{Ln}(1-i) = \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$

$(= \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4})$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$ [Kehitet. 1. sarakk. muk.]

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda(\lambda-5)+4) - 2(5-\lambda) + 4 + 4(2-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) + 2 - 2\lambda$$

$$= (1-\lambda)[(\text{— " —}) + 2]$$

$$= (1-\lambda)\underbrace{[\lambda^2 - 5\lambda + 6]}_{(\lambda-2)(\lambda-3)}$$

[$2+3=5$, $2\cdot 3=6$, ei siis välttämättä tarvita edes 2. ast. yht. ratk. kaavaa]

Siis om. arvot: 1, 2, 3.

Pienintä (1) vast. om. vekt.:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} 2y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ (4(x - y + z) &= 0) \end{aligned} \quad \Updownarrow \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$z = t$ (vapaasti)

$y = \frac{1}{2}t$

$x = -\frac{1}{2}t$

Val. $t = 2$; $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Muut om. vektorit:
"Kumpi vastaa kumpaa" ?

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} \overset{(*)}{=} 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

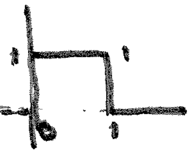
Siis $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ on om. arvoa $\lambda = 3$ vast. om. vekt.

Siten $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$:n täytyy vastata om. arvoa 2.

yl. ratk.

$$\vec{y}(t) = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

<u>Huom!</u> Tehtävässä on annettu om. arvo $\lambda = 1$ ja muut ominaisvektorit. Om. arvot 2 ja 3 saadaan rennosti myös suoraan määritelmän mukaan, kuten om. arvo 3 (*) yllä.
Siten tehtävän voi laskea myös kokonaan ilman karakteristista polynomia $\det(A - \lambda I)$.

3) $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = \end{cases}$  $= u(t) - u(t-1)$

$y(0) = 0, \; y'(0) = 0$

$\mathcal{L}$ - muunnetaan, sij. AE:t, merk. $Y = \mathcal{L}y$.

$$\underbrace{(s^2 - 5s + 6)}_{(s-2)(s-3)} Y = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \quad \left[\begin{matrix}\text{Koska} \\ \text{AE:t} = 0\end{matrix}\right]$$

[Vrt. teht. 2]

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{s(s-2)(s-3)} - \frac{1}{s(s-2)(s-3)} e^{-s}$$

$$\frac{1}{s(s-2)(s-3)} = \underbrace{\frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}}$$

Sievennetään op. ja kirjoitetaan yhtälöt A, B, C:lle,

tai 1) Kerr. puolitt. s:llä ja sij. $s = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{(-2)(-3)} = A; \quad A = \frac{1}{6}$$

2) Kerr. puolitt. $(s-2)$:lla ja sij. $s = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \cdot (-1)} = B; \quad B = -\frac{1}{2}$$

3) Kerr. puolitt. $(s-3)$:lla ja sij. $s = 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{3 \cdot 1} = C; \quad C = \frac{1}{3}$$

Siis $\underset{\text{(merk.)}}{G(s)} := \frac{1}{s(s-2)(s-3)} = \frac{1}{6s} - \frac{1}{2(s-2)} + \frac{1}{3(s-3)}$

Merk. $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t}$

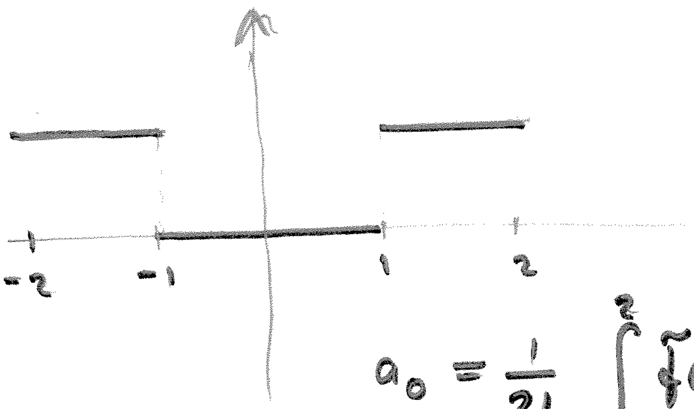
$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)e^{-s}\} = u(t-1)\,g(t-1)$, joten

$$y(t) = g(t) - u(t-1)\,g(t-1)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t} - u(t-1)\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2(t-1)} + \frac{1}{3}e^{3(t-1)}\right]$$

4) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

Merk. $\tilde{f} =$ f:n parill. laajennus



Jakso $2L = 4$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-2}^{2} \underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{parill.}} dx = \frac{1}{L}\int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 1\,dx = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-2}^{2} \underbrace{\tilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}}_{\text{parill.}} dx = \frac{2}{L}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\Big/_{1}^{2} \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\Big(\underbrace{\sin n\pi}_{0} - \underbrace{\sin\frac{n\pi}{2}}_{1,\,0,\,-1,\,0,\,\ldots}\Big)$$

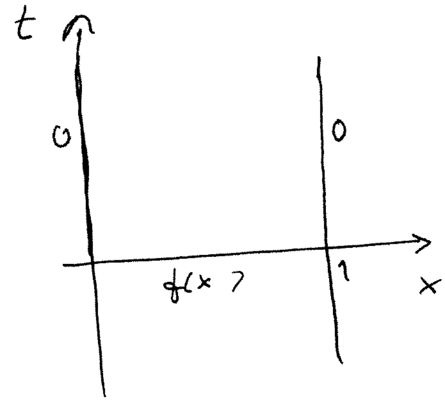
$(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\Big(-\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2} + \; + \ldots\Big)$$

5) $u_t = u_{xx}$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$

$u(x,0) = f(x) = 3\sin \pi x + 5\sin 4\pi x$



Yrite: $u(x,t) = F(x)G(t)$

Sij lämpöyhtälöön:

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t) \Longrightarrow$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)}$$ $\forall (x,t)$, joten kummankin on oltava sama vakio, jota merk. $-p^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) + p^2 F(x) = 0 & (F) \\ G'(t) + p^2 G(t) = 0 & (G) \end{cases} \quad \Rightarrow F(x) = A\cos px + B\sin px$$

RE:t $\Rightarrow$ $F(0) = F(1) = 0$

$\Rightarrow A = 0$, $\sin p \cdot 1 = 0$ $\Rightarrow$ $p = n\pi$.

$F_n(x) = \sin n\pi x$, $n \in \mathbb{N}_0$ $(=\{0,1,2,\ldots\})$

$G(t) = Ce^{-p^2 t}$; $G_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}$, $n \in \mathbb{N}_0$

Funktiot $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$ tot. lämpöyhtälön ja RE:t, samoin niiden mielív. lin. kombinaatio:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x,t).$$

Voidaanko valita kertoimet c_n s.e. AE tot.!

AE: $u(x,0) = 3\sin\pi x + 5\sin 4\pi x$.

Vaatimus:

$$c_1 u_1(x,0) + c_2 u_2(x,0) + c_3 u_3(x,0) + c_4 u_4(x,0) + \dots = 3\sin\pi x + 5\sin 4\pi x, \quad \text{ts.}$$

$$c_1 \sin\pi x + c_2 \sin 2\pi x + c_3 \sin 3\pi x + c_4 \sin 4\pi x = 3\sin\pi x + 5\sin 4\pi x.$$

No mutta, tämähän toteutuu valitsemalla: $c_1 = 3$, $c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = 5$, $c_5 = c_6 = \dots = 0$.

Ratkaisu kuuluu siten:

$$u(x,t) = 3\sin\pi x\, e^{-\pi^2 t} + 5\sin 5\pi x\, e^{-25\pi^2 t}$$

(Fourier-sarjaa ei todellakaan tarvittu!)