

SEPAROITUVAT DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

$$y'(t) = f(y(t))g(t) \Rightarrow$$

$$H(y(t)) = G(t) + C$$

$$H'(u) = \frac{1}{f(u)} \quad G'(t) = g(t)$$

Jos y_* on f :n nollakohta, eli $f(y_*) = 0$ niin

$y(t) = y_*, t \in \mathbb{R}$ on (vakio)ratkaisu

$$y'(t) = f(y(t))$$

Jos f on jatkuva, $f(y_*) = 0$ ja jollakin $\delta > 0$

$f(y) > 0$ kun $y \in (y_* - \delta, y_*)$ ja $f(y) < 0$ kun $y \in (y_*, y_* + \delta)$

siis erikoisesti kun $f'(y_*) < 0$,

niin y_* on asympotoottisesti stabiili vakioratkaisu

eli jos $\epsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$ s.e. jos $|y(0) - y_*| < \delta$ niin $|y(t) - y_*| < \epsilon$

$$\text{ja } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_*$$

1. KERTALUVUN LINEAARISET DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(r) dr} f(s) ds$$

$$y'(t) + ay(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

missä $y_h(t) = ce^{-at}$ on homogeenisen yhtälön ratkaisu

ja $y_p(t)$ on jokin epähomogeenisen yhtälön ratkaisu

$$\text{Jos } f(t) = p_1(t)e^{\mu t} \cos(\eta t) + p_2(t)e^{\mu t} \sin(\eta t)$$

$$\text{niin } y_p(t) = q_1(t)e^{\mu t} \cos(\eta t) + q_2(t)e^{\mu t} \sin(\eta t)$$

missä p_j ja q_j ovat polynomeja

2. KERTALUVUN LINEAARISET YHTÄLÖT

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Karakteristinen yhtälö: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1, \lambda_2$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ reaaliset: } y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 : y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i : y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

$$\text{Jos } f(t) = p_1(t)e^{\mu t} \cos(\eta t) + p_2(t)e^{\mu t} \sin(\eta t)$$

missä p_1 ja p_2 ovat on polynomeja, niin

$$y(t) = y_h(t) + q_1(t)e^{\mu t} \cos(\eta t) + q_2(t)e^{\mu t} \sin(\eta t)$$

missä q_1 ja q_2 ovat polynomeja ja y_h on homogeenisen yhtälön ratkaisu

$$y_p(t) = \int_0^t g(t-s)f(s) \, ds$$

on differentiaaliyhtälön

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

yksityisratkaisu jos

$$ag''(t) + bg'(t) + cg(t) = 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = \frac{1}{a}.$$

Summasääntö

eli "superpositioperiaate epähomogeeniselle yhtälölle"

Jos y_1 on DY:n $ay'' + by' + cy = f_1$ ratkaisu, ja

y_2 on DY:n $ay'' + by' + cy = f_2$ ratkaisu, niin

funktio $y_1 + y_2$ on DY:n $ay'' + by' + cy = f_1 + f_2$ ratkaisu

2. kertaluvun lineaarisen **homogeenisen** differentiaaliyhtälön

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

yleinen ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$$

missä $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ ovat yhtälön kaksi **lineaarisesti riippumatonta** ratkaisua.

Jos y_1 on löydetty voidaan y_2 hakea muodossa $y_2(t) = c(t)y_1(t)$

Funktiot $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ ovat **lineaarisesti riippumattomia** välillä I jos

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0, \quad t \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

eli $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0$ kaikilla $t \in I$ **ainoastaan** kun $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Funktiot $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ ovat **lineaarisesti riippuvia** välillä I jos

ne eivät ole lineaarisesti riippumattomia, eli

ainakin yksi funktioista voidaan kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa, eli

$$f_j(t) = \beta_1 f_1(t) + \dots + \beta_{j-1} f_{j-1}(t) + \beta_{j+1} f_{j+1}(t) + \dots + \beta_n f_n(t), \quad t \in I$$

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖSYSTEMIT

Funktio y toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t)$$

jos ja vain jos vektorifunktio $Y(t)$ toteuttaa yhtälön

$$Y'(t) = AY(t) + F(t)$$

missä

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Jos $F(Y_*) = 0$ niin Y_* on

differentiaaliyhtälön $Y'(t) = F(Y(t))$ vakioratkaisu

Yhtälön $Y'(t) = F(Y(t))$ vakioratkaisu Y_* on **stabiili**

jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että
jos $|Y(0) - Y_*| < \delta$ niin $|Y(t) - Y_*| < \epsilon$ kaikilla $t \geq 0$

ja se on **asymptoottisesti stabiili** jos lisäksi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = Y_* \text{ kun } |Y(0) - Y_*| < \delta_* \text{ missä } \delta_* > 0$$

Jos F on jatkuva, F on derivoituva pisteessä Y_* , $F(Y_*) = 0$ ja

$F'(Y_*)$:n kaikilla ominaisarvoilla on negatiivinen reaaliosa

niin Y_* on yhtälön $Y'(t) = F(Y(t))$ asymptoottisesti stabiili vakioratkaisu

Jos F on jatkuva, F on derivoituva pisteessä Y_* , $F(Y_*) = 0$ ja

$F'(Y_*)$:lla on (ainakin) yksi ominaisarvo, jolla on positiivinen reaaliosa

niin Y_* ei ole yhtälön $Y'(t) = F(Y(t))$ stabiili vakioratkaisu

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖIDEN NUMEERISET MENETELMÄT

$$\begin{aligned} \text{Eulerin menetelmä: } y'(x) &= f(x, y(x)), y(x_0) = y_0 \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n), \quad y_n \approx y(x_n), \quad x_n = x_{n-1} + h \\ \text{Virhe (rajoitetulla välillä): } &O(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Implisiittinen Eulerin menetelmä: } y'(x) &= f(x, y(x)), y(x_0) = y_0 \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad y_n \approx y(x_n), \quad x_n = x_{n-1} + h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eulerin parannettu menetelmä: } y'(x) &= f(x, y(x)), y(x_0) = y_0 \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1), \quad y_n \approx y(x_n), \quad x_n = x_{n-1} + h \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\ \text{Virhe (rajoitetulla välillä): } &O(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Implisiittinen keskipistemenetelmä: } y'(x) &= f(x, y(x)), y(x_0) = y_0 \\ y_n &\approx y(x_n), \quad x_n = x_{n-1} + h \\ \text{Ratkaistaan } k_1 \text{ yhtälöstä } k_1 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + k_1 \\ \text{Virhe (rajoitetulla välillä): } &O(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4. kertaluvun Runge-Kuttan menetelmä: } y'(x) &= f(x, y(x)), y(x_0) = y_0 \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2), \quad y_n \approx y(x_n), \quad x_n = x_{n-1} + h \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ \text{Virhe (rajoitetulla välillä): } &O(h^4) \end{aligned}$$

Virheen estimointi:

Laske (ainakin) kahdella eri tavalla, esim eri menetelmillä
tai yksi askel askelpituudella h , kaksi askelta askelpituudella $\frac{h}{2}$.
Paremmen menetelmän virheen estimaattina voidaan käyttää
laskettujen tulosten erotuksen itseisarvoa.

SARJAT, ITSEINEN SUPPENEMINEN

Jos $x_n \leq C < \infty$ ja $x_{n+1} \geq x_n$ kun $n \geq n_0$
tai $x_n \geq C > -\infty$ ja $x_{n+1} \leq x_n$ kun $n \geq n_0$
niin raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ on olemassa

”Sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ suppenee” $\Leftrightarrow$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^k a_n = S$ on olemassa ($|S| < \infty$)
ja silloin kirjoitetaan $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = S$.
Jos sarja ei suppene, niin se hajaantuu.

Jos **ei** päde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ niin sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **ei** suppene

Geometrisen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ suppenee kun $|q| < 1$ ja
$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

Jos $a \neq 0$ ja $|q| \geq 1$ niin sarja hajaantuu

Jos sarjat $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ suppenevat
niin myös sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ suppenee ja
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

Jos sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ suppenee (eli sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ suppenee **itseisesti**)
niin sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ suppenee

SUPPENEMISKRITEERIT JA ESTIMAATIT

Majoranttiperiaate

Jos $0 \leq a_n \leq b_n$ kun $n \geq n_0$ ja

sarja $\sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$ suppenee

niin sarja $\sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ suppenee

Minoranttiperiaate

Jos $0 \leq b_n \leq a_n$ kun $n \geq n_0$ ja

sarja $\sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$ hajaantuu

niin sarja $\sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ hajaantuu

Vertailuperiaate

Oletetaan: $a_n \geq 0$ ja $b_n \geq 0$ kun $n \geq n_0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ ja $\sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$ suppenee $\Rightarrow \sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ suppenee

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ ja $\sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$ hajaantuu $\Rightarrow \sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ hajaantuu

Suhdetesti

Jos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ ja

$q < 1$ niin sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ suppenee (itseisesti)

ja jos $q > 1$ niin sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Jos $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq Q < 1$ kun $n \geq N$ niin

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \frac{|a_N|}{1-Q}$$

$$\text{Sarja } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{suppenee jos } p > 1 \\ \text{hajaantuu jos } p \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \text{Jos } p > 1 \text{ ja } N > 1 \text{ niin} \\ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{p-1} \frac{1}{(N-1)^{p-1}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Jos } 0 \leq a_{n+1} \leq a_n \text{ kun } n > N \text{ ja } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ niin} \\ \text{sarja } \sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ suppenee ja} \\ \left| \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_N \end{array}$$

POTENSSISARJAT

Potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ suppenemissäde on $R \Leftrightarrow$
 sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ suppenee (itseisesti) kun $|x - x_0| < R$ ja
 hajaantuu kun $|x - x_0| > R$

Jos potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ suppenemissäde on $R > 0$ niin
 funktio $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ on äärettömän monta kertaa derivoituva
 kun $|x - x_0| < R$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}$$
 ja tämän potenssisarjan suppenemissäde on R ,
 eli potenssisarjoja voi derivoida ja integroida termeittäin.

Jos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ kun $|x| < r, r > 0$
 niin $a_n = b_n$ kaikilla $n \geq 0$

Jos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ niin $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1},$$

$(t - x_0)(x - t) > 0$ eli t on x_0 :n ja x :n välillä

eli jos f on äärettömän monta kertaa derivoituva ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|t - x_0| \leq r} |f^{(k)}(t)| \frac{r^k}{k!} = 0$$

niin $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ kun $|x - x_0| \leq r$

$$\mathbf{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1$$