Lagrangen kertojat

$\min_{\max} f(x,y,z) = ?$ kun $g(x,y,z) = 0$:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

Ratkaistava:

$L'(x,y,z,\lambda) = 0$ eli

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) + \lambda g_x(x,y,z) &= 0 \\ f_y(x,y,z) + \lambda g_y(x,y,z) &= 0 \\ f_z(x,y,z) + \lambda g_z(x,y,z) &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Jos suurin tai pienin arvo saavutetaan jossakin pisteessä
niin siinä pisteessä joko
edelliset yhtälöt ovat voimassa, tai
g:n derivaatta on 0, tai
f tai g eivät ole derivoituvia

$\min_{\max} f(x,y,z) = ?$ kun $g(x,y,z) = 0$ ja $h(x,y,z) = 0$:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

Ratkaistava:

$$L'(x,y,z,\lambda,\mu) = 0$$

Pienin neliösumma

Regressiosuora

Annettu: (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, $y \approx ax + b$

Valitaan a ja b siten, että minimoidaan

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|^2$$

Osittaisderivaatat a:n ja b:n suhteen ovat 0 jos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + \qquad nb = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Usein voi olla edullista korvata luvut x_i luvuilla $x_i - \overline{x}$

missä $\overline{x}$ on keskiarvo eli $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

jolloin b:n paikalle tulee $\tilde{b} = b + a\overline{x}$

ja koska $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$ saadaan

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad \text{ja} \quad \tilde{b} = b + a\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y}.$$

$$\min \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big(c_1 f_1(x_i) + c_2 f_2(x_i) + \ldots + c_m f_m(x_i) - y_i\Big)^2$$

$$A_{i,j} = f_j(x_i), \quad \mathbf{c}(j) = c_j, \quad \mathbf{y}(i) = y_i$$

$$A^{\mathrm{T}} A\mathbf{c} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{c} = (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$$

Integraalin derivointi

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t,x)\,\mathrm{d}t = \\ f(b(x),x)b'(x) - f(a(x),x)a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(t,x)\,\mathrm{d}t\end{gathered}}$$

Tasointegraali

Funktio f on integroituva suorakulmiossa T ja $\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}A = I$ jos
jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos
$T = [a,b]\times[c,d]$, $a = x_0 < x_1 < \dots x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots y_n = d$ ja
$|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $i = 1,\dots,m$ ja $|y_j - y_{j-1}| < \delta$, $j = 1,\dots,n$
sekä $(x^*_{i,j}, y^*_{i,j}) \in [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, niin

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{i,j}, y^*_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) - I\right| < \epsilon$$

Jos $D \subset T$ missä T on suorakulmio niin
f on integroituva D:ssä jos funktio

$$f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$$

on integroituva T:ssä ja silloin

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_T f_D(x,y)\,\mathrm{d}A$$

Fubinin lause:

Jos jokin integraaleista

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} |f(x,y)|\,\mathrm{d}A, \quad \int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x, \quad \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

on äärellinen (ja f on jatkuvien funktioiden raja-arvo melkein kaikkialla) niin

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = 0 \quad \text{jos } D\text{:n pinta-ala on } 0$$

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}A = D\text{:n pinta-ala}$$

Jos $f(x,y) \geq 0$ joukossa D niin $V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A$ on

joukon $\{\,(x,y,z) \mid (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\,\}$ tilavuuus

$$\iint_D \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big)\,\mathrm{d}A = \alpha \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A + \beta \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}A$$

Jos $f(x,y) \leq g(x,y)$, $(x,y) \in D$ niin $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A \leq \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}A$

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}A$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \sum_{j=1}^{k} \iint_{D_j} f(x,y)\,\mathrm{d}A \quad \text{jos}$$

$D = \cup_{j=1}^{k} D_j$ ja $D_i \cap D_j = \emptyset$ kun $i \neq j$

”Epäoleelliset” integraalit

Jos $f(x,y) \geq 0$ joukossa D (mutta f ei ole rajoitettu, eikä D ole rajoitettu) niin

f on integroituva joukossa D jos löytyy jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ s.e.

$$0 \leq f_n(x,y) \leq f_{n+1}(x,y) \leq f(x,y) \quad (x,y) \in D$$

$$f_n(x,y) = 0 \quad (x,y) \notin D$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

f_n on integroituva joukossa $[-n,n] \times [-n,n]$ ja

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim_{n\to\infty} \iint_{[-n,n]\times[-n,n]} f_n(x,y)\,\mathrm{d}A < \infty$$

Yleisesti, f on integroituva jos f_+ ja f_- ovat integroituvia

missä $f_+(x,y) = \max\{0, f(x,y)\}$ ja $f_-(x,y) = \max\{0, -f(x,y)\}$ ja

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_D f_+(x,y)\,\mathrm{d}A - \iint_D f_-(x,y)\,\mathrm{d}A$$

Majoranttiperiaate

Jos $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ kun $(x,y) \in D$ ja g on integroituva D:ssä, eli

$\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}A < \infty$ (ja f on jatkuvien funktioiden raja-arvo) niin

f on integroituva joukossa D, eli $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A < \infty$

Avaruusintegraali

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

määritellään ja lasketaan samanlaisella tavalla kuin tasointegraali!

Numeerinen integrointi

Jos K on (pieni) kolmio, jonka kärkipisteet ovat $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ja $\mathbf{x}_3$ niin

$$\iint_K f\,\mathrm{d}A \approx \text{pinta-ala}(K)\sum_{j=1}^{m} w_j f(\hat{\mathbf{x}}_j)$$

missä esimerkiksi

$$m=3,\quad w_j=\frac{1}{3},\quad \hat{\mathbf{x}}_j=\sum_{k=1}^{3}\frac{3\delta_{j,k}+1}{6}\mathbf{x}_k$$

missä $\delta_{j,k}=1$ jos $j=k$ ja 0 muuten, tai

$$m=3,\quad w_j=\frac{1}{3},\quad \hat{\mathbf{x}}_j=\sum_{k=1}^{3}\frac{1-\delta_{j,k}}{2}\mathbf{x}_k$$

jolloin molemmissa tapauksissa approksimaatio on tarkka

korkeintaan astetta 2 olevilla polynomeilla.

Muuttujien vaihto

$$x = x(s,t) \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$
$$y = y(s,t)$$

$(x,y) \in D \Leftrightarrow (s,t) \in D'$ ja kuvaus on bijektio

$$\Rightarrow$$

$$\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_{D'} f(x(s,t),y(s,t)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{1}{\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}}$$

Napakoordinaatit

$$x = r\cos(\theta) \qquad r \geq 0$$
$$y = r\sin(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Pallokoordinaatit

$$x = \rho\cos(\theta)\sin(\phi) \qquad \rho \geq 0$$
$$y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
$$z = \rho\cos(\phi) \qquad \phi \in [0, \pi]$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin(\phi)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Käyräintegraalit ja potentiaalifunktiot

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

missä $\mathbf{r}(t)$, $t\in[a,b]$ on käyrän C parametriesitys

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \Big(P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big)$$

jos $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

missä $\mathbf{r}(t)$, $t\in[a,b]$ ($a\le b$) on käyrän C parametriesitys

Funktio $\mathbf{F}$ on konservatiivinen eli eksakti $\Leftrightarrow$

$\mathbf{F} = \varphi' = \nabla\varphi$ ja silloin φ on $\mathbf{F}$:n potentiaalifunktio $\Leftrightarrow$

$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ on tiestä riippumaton eli $= \varphi(\text{loppupiste}) - \varphi(\text{alkupiste})$ $\Leftrightarrow$

$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ kun C on umpinainen käyrä $\Leftrightarrow$

jos $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ niin $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$ ja $Q_z = R_y$ $\Leftrightarrow$

$\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$

Käyrän $\mathbf{r}(s)$ parameterina on kaarenpituus jos

$|\mathbf{r}'(s)| = 1 \quad$ kaikilla s

ja tässä tapauksessa

$\kappa(s) = |r''(s)|$ on kaarevuus.

Muissa tapauksissa kaarevuus on

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

Pintaintegraali

$$\iint_A \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \quad \text{ja} \quad \iint_A f\,\mathrm{d}S$$

($\mathbf{n}$ on yksikkönormaali)

Pinta A: $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \quad (u,v)\in D$

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = (\pm)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}S = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$z = f(x,y) \Rightarrow$$

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \pm\big(-f_x(x,y)\mathbf{i} - f_y(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \pm a^2\sin(\phi)\Big(\cos(\theta)\sin(\phi)\mathbf{i} + \sin(\theta)\sin(\phi)\mathbf{j} + \cos(\phi)\mathbf{k}\Big)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}S = a^2\sin(\phi)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \pm a\big(\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}\big)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}S = a\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Pinta-ala- ja tilavuuslaskut

Joukko, jonka rajoittavat käyrät $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ pyörähtää x-akselin ympäri: Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

Joukko, jonka rajoittavat käyrät $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$, $0 \leq a < b$,
pyörähtää y-akselin ympäri: Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$2\pi \int_a^b x|f(x)| \,\mathrm{d}x$$

Käyrä $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ pyörähtää x-akselin ympäri: Pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2} \,\mathrm{d}x$$

Käyrä $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$ pyörähtää y-akselin ympäri: Pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$2\pi \int_a^b |x(t)|\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \,\mathrm{d}t$$

Divergenssi ja roottori

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Divergenssi: } \nabla \cdot (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \\ \text{Roottori: } \nabla \times (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} \\ \nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}}$$

Derivaatan integraali

Greenin lause:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = \oint_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\,\mathrm{d}A = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

∂D kierretään positiiviseen suuntaan, eli D jää vasemmalle

Divergenssilause tasossa:

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}A = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

missä $\mathbf{n}$ on normaali ulospäin

$\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = (y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j})\,\mathrm{d}t$ jos $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$

D:n pinta-ala $= \frac{1}{2}\oint_{\partial D} (-y)\,\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} (-y)\,\mathrm{d}x$

Stokesin lause:

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

∂S kierretään positiiviseen suuntaan

eli A jää vasemmalle $\mathbf{n}$:n osoittamasta suunnasta katsottuna

Divergenssilause eli Gaussin lause:

$$\iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

(normaali $\mathbf{n}$ ulospäin).

Osittaisintegrointi:

$$\iiint_B (\nabla \cdot \mathbf{w})v\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial B} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v\,\mathrm{d}S - \iiint_B \mathbf{w} \cdot (\nabla v)\,\mathrm{d}V$$