

RAJA-ARVOT

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$:
jos $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ on ”riittävän pieni” ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ niin $|f(\mathbf{x}) - L|$ on ”pieni”

$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} f(\mathbf{x}) = L$
jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että
jos $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ ja $\mathbf{x} \in \Omega$ niin $|f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$

Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = F$ ja $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ niin
 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha F + \beta G,$
 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = FG,$
 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{F}{G},$ mikäli $G \neq 0$.

Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0$ ja $|f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ (kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$) niin $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$

Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L$ ja $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ (kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$) niin
 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ **EI OLE OLEMASSA** jos
 $\lim_{t \rightarrow 0+} f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$ ei ole riippumaton luvuista α ja β .

Jos $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ ja $g(\mathbf{x}) \neq G$ kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ niin
 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(g(\mathbf{x})) = \lim_{t \rightarrow G} f(t)$

Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G,$ ja $f(x) \leq g(x)$ kun $x \neq x_0$ niin
 $F \leq G$

Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F$ niin $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x) = F$

JATKUVUUS

Funktio $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0$ jos $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ja

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

eli Ω on $\mathbb{R}^d$:n osajoukko, $\mathbf{x}_0$ kuuluu joukkoon Ω ,

$f(\mathbf{x}_0)$ on määritelty, raja-arvo on olemassa ja on $= f(\mathbf{x}_0)$

Funktio $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ($\mathbb{R}^d$:n osajoukossa) Ω jos

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) \text{ kaikilla } \mathbf{x}_0 \in \Omega$$

Jos f ja $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia, niin

$\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})$ ja $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ ovat jatkuvia Ω :ssa ja

$\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ on jatkuva joukossa $\{\mathbf{x} \in \Omega \mid g(\mathbf{x}) \neq 0\}$

Jos $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $g : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ ovat jatkuvia

missä $V \subset \mathbb{R}^m$ ja $W \subset \mathbb{R}^d$

eli kaikki komponentit ovat jatkuvia

ja $g(\mathbf{x}) \in V$ kaikilla $\mathbf{x} \in W$ niin

yhdistetty funktio $f \circ g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ on jatkuva: $W \rightarrow \mathbb{R}^n$

Jos $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja $V \subset \mathbb{R}^d$ on suljettu ja rajoitettu
niin on olemassa $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2 \in V$ siten, että

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2) \text{ kaikilla } \mathbf{x} \in V$$

eli pienin ja suurin arvo saavutetaan.

Jos V ei ole suljettu tai ei ole rajoitettu näin ei välttämättä ole.

Joukko $V \subset \mathbb{R}^d$ on suljettu jos sen reuna $\partial V \subset V$

ja se on avoin jos $\partial V \cap V = \emptyset$ eli $\mathbb{R}^d \setminus V$ on suljettu.

$\partial V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \text{kaikilla } \delta > 0 \text{ löytyy } \mathbf{s}_\delta \in V \text{ ja}$

$\mathbf{u}_\delta \in \mathbb{R}^d \setminus V \text{ siten, että } |\mathbf{s}_\delta - \mathbf{x}| < \delta \text{ ja } |\mathbf{u}_\delta - \mathbf{x}| < \delta\}$

Joukko V on rajoitettu jos on olemassa vakio $C < \infty$ s.e. $|\mathbf{x}| \leq C$ kun $\mathbf{x} \in V$

OSITTAISDERIVAATAT

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ f_y(x, y) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_1 = D_1 f = D^{(1,0)} f \dots \\ f_{xy} &= (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D^{(1,1)} f \end{aligned}$$

Jos f_x , f_y , f_{xy} ja f_{yx} ovat olemassa ja jatkuvia niin

$$f_{xy} = f_{yx}$$

DERIVAATTA ELI GRADIENTTI, KETJUSÄÄNTÖ

Funktio $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva eli differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$ jos on olemassa vektori $f'(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ siten, että

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

$f'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ on $1 \times d$ vaakavektorin ja $d \times 1$ -pystyvektorin matriisitulo joka voidaan myös kirjoittaa pistetulona $f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$

Jos funktiolla $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvat osittaisderivaatat, niin f on derivoituva ja

$$f'(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}), f_{x_2}(\mathbf{x}), \dots, f_{x_d}(\mathbf{x}))$$

Jos f on derivoituva pisteessä $\mathbf{x}$ niin f on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}$

Jos $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ on (pysty)vektorfunktio, niin $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ on $n \times d$ -matriisi, jonka vaakavektoreina ovat funktion $\mathbf{f}$ komponenttien derivaatat eli gradientit, eli

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})_{i,j} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

Ketjusääntö:

Jos $h(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ niin $h'(\mathbf{x}) = f'(g(\mathbf{x}))g'(\mathbf{x})$

Funktion f suunnattu derivaatta suuntaan $\mathbf{u}$ on

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{u} \frac{1}{|\mathbf{u}|} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}$$

LINEAARINEN APPROKSIMOINTI

Approksimointi:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) &\approx f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} \\f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &- f(x, y, z) \\&\approx f_x(x, y, z)\Delta x + f_y(x, y, z)\Delta y + f_z(x, y, z)\Delta z\end{aligned}$$

**Funktio kasvaa nopeimmin gradientin eli derivaatan suuntaan !!
joten gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyriä vastaan**

Pinnan $f(x, y, z) = 0$ normaali pisteessä (x_0, y_0, z_0) on

$$f'(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}$$

ja tangenttitaso on silloin

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

NEWTONIN MENETELMÄ

Newtonin menetelmä: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = ?$

Jos $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ niin

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n) \Delta \mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{x} \approx -\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

ja jotta $\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}$ valitaan

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

Jos $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ on jatkuvasti derivoituva

$\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_*)$ on kääntyvä matriisi

ja jos $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*|$ on riittävän pieni, niin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_*$$

IMPLISIITTIFUNKTIOT

Implisiittifunktiolause: $f(x, y) = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} y = g(x)$

Jos f on jatkuvasti derivoituva,

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

ja $f_y(x_0, y_0)$ on kääntyvä matriisi,
niin on olemassa funktio $g(x)$ siten, että

$$g(x_0) = y_0 \text{ ja } f(x, g(x)) = 0$$

kun $|x - x_0|$ on riittävän pieni.

Derivoimalla saadaan

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x))g'(x) = 0$$

ja kun sijoitetaan $x = x_0$ ja ratkaistaan $g'(x_0)$ niin

$$g'(x_0) = -f_y(x_0, y_0)^{-1}f_x(x_0, y_0).$$

Jos halutaan ratkaista x muuttujan y funktiona, eli $x = h(y)$

niin tulos on vastaavanlainen

Jos $f(x_0, y_0) = 0$, $f(x, y)$ on jatkuvasti derivoituva,

ja $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$ niin

$$f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \approx 0$$

ja jos $f_x(x_0, y_0)$ on kääntyvä matriisi niin

$$\Delta x \approx -f_x(x_0, y_0)^{-1}f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

Jos $F(x, y, z, w) = 0$ ja $G(x, y, z, w) = 0$ voidaan mahdollisesti ratkaista

$$w = w(x, y), z = z(x, y) \text{ tai } w = w(x, z), y = y(x, z)$$

ja silloin ei ole selvää mitä $\frac{\partial w}{\partial x}$ tarkoittaa.

ÄÄRIARVOT

Jos f on derivoituva pisteessä $\mathbf{x}_0$ ja

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \text{ jos } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r$$

missä $r > 0$, eli $\mathbf{x}_0$ on paikallinen minimipiste, niin

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

f kahdesti jatkuvasti derivoituva, $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ja

$$A = f''(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_1 x_d}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_d x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_d x_d}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Jos kaikki A :n ominaisarvot ovat > 0 niin $\mathbf{x}_0$ on paikallinen minimipiste.

Jos kaikki A :n ominaisarvot ovat < 0 niin $\mathbf{x}_0$ on paikallinen maksimipiste.

Jos A :lla on ainakin yksi positiivinen ja ainakin yksi negatiivinen ominaisarvo
niin $\mathbf{x}_0$ ei ole paikallinen minimi- eikä maksimipiste.

Jos A on symmetrinen 2×2 matriisi, niin

A :n ominaisarvot ovat > 0

$$\Leftrightarrow A_{1,1} > 0 \quad \text{ja} \quad \det(A) > 0$$

A :n ominaisarvot ovat < 0

$$\Leftrightarrow A_{1,1} < 0 \quad \text{ja} \quad \det(A) > 0$$

A :n ominaisarvot ovat erimerkkiset

$$\Leftrightarrow$$

$$\det(A) < 0$$

Jos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja

Ω on rajoitettu ja suljettu (Ω :n reuna $\partial\Omega \subset \Omega$) niin

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

eli funktion f suurin arvo saavutetaan pisteessä $\mathbf{x}_0$

missä joko $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ (Ω :n reuna)

tai $\mathbf{x}_0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$ ja $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ tai

f ei ole derivoituva pisteessä $\mathbf{x}_0$