

Separoituvat differentiaaliyhtälöt

1. Eräs suure $y(t)$ vaihtelee välillä $(0, 100)$ ja muutosnopeus on verrannollinen tuloon $(100 - y(t))y(t)$. Määritä $y(t)$:n lauseke t :n funktiona.

Vihje: $\frac{1}{(100-y)y} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{100-y} \right)$.

Ratkaisu: Muutosnopeus on $y'(t)$ ja oletuksen mukaan

$$y'(t) = \alpha(100 - y(t))y(t),$$

missä α on jokin vakio. Tällä yhtälöllä on tietenkin vakioratkaisut $y(t) = 0$ ja $y(t) = 100$ mutta jos $y(t) \neq 0$ ja $y(t) \neq 100$ niin saadaan

$$\frac{y'(t)}{(100 - y(t))y(t)} = \alpha \Rightarrow \int \frac{y'(t)}{(100 - y(t))y(t)} dt = \int \alpha dt = \alpha t + \beta.$$

Sijoituksella $y(t) = u$, jolloin $y'(t) dt = du$, saadaan

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(t)}{(100 - y(t))y(t)} dt &= \int \frac{1}{(100 - u)u} du = \int \frac{1}{100} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{100 - u} \right) du \\ \frac{1}{100} (\ln(|u|) - \ln(|100 - u|)) &= \frac{1}{100} \ln \left(\left| \frac{u}{100 - u} \right| \right) = \frac{1}{100} \ln \left(\frac{y(t)}{100 - y(t)} \right), \end{aligned}$$

missä käytettiin hyväksi oletusta, että $0 < y(t) < 100$. Näin ollen

$$\frac{1}{100} \ln \left(\frac{y(t)}{100 - y(t)} \right) = \alpha t + \beta \Rightarrow \frac{y(t)}{100 - y(t)} = e^{at+b},$$

missä $a = 100\alpha$ ja $b = 100\beta$. Tästä voidaan ratkaista

$$y(t) = \frac{100e^{at+b}}{1 + e^{at+b}} = \frac{100}{e^{-at-b} + 1}.$$

2. Ratkaise yhtälö $y'(t) = y(t)^2 e^{-t}$, $y(0) = a$. Millä a :n arvoilla ratkaisu on olemassa kaikilla $t \geq 0$.

Vihje: Jos ratkaisu ei ole olemassa kun $t \geq t_0$, niin se johtuu siitä, että $\lim_{t \rightarrow t_0-} |y(t)| = \infty$.

Ratkaisu: Ensiksi todetaan, että $y(t) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ on vakioratkaisu. Jos $y(t) \neq 0$ niin

$$\frac{y'(t)}{y(t)^2} = e^{-t} \Rightarrow \int \frac{y'(t)}{y(t)^2} dt = \int e^{-t} dt = -e^{-t} + C,$$

ja koska

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^2} dt \stackrel{y(t)=u, y'(t)dt=du}{=} \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{y(t)},$$

niin

$$-\frac{1}{y(t)} = -e^{-t} + C \Rightarrow y(t) = \frac{1}{e^{-t} - C}.$$

Sijoittamalla tähän $t = 0$ saadaan

$$a = \frac{1}{e^{-0} - C} \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{a} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{e^{-t} + \frac{1}{a} - 1}.$$

Jos ratkaisun lausekkeen nimittäjä on nolla jossain pisteessä $t_0 > 0$ niin silloin ratkaisulle pätee $\lim_{t \rightarrow t_0^-} y(t) = +\infty$, eikä ratkaisu ole olemassa kaikilla $t \geq 0$. Koska $0 < e^{-t} \leq 1$ niin nähdään että näin ei tule käymään jos $a \leq 1$.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'(t) = \frac{t^2 + 2y(t)^2}{ty(t)}$, $y(1) = 2$, ottamalla käyttöön uusi funktio $u(t) = y(t)/t$, jolloin $y(t) = tu(t)$ ja $y'(t) = u(t) + tu'(t)$.

Ratkaisu: Jos $y(t) = tu(t)$ niin $y'(t) = u(t) + tu'(t)$ ja yhtälöksi tulee

$$u(t) + tu'(t) = \frac{t^2 + 2t^2u(t)^2}{t^2u(t)} = \frac{1 + 2u(t)^2}{u(t)}$$

eli

$$u'(t) = \frac{1}{t} \frac{1 + u(t)^2}{u(t)}, \quad u(1) = \frac{2}{1} = 2.$$

Tämä yhtälö on separoituva ja se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{u'(t)u(t)}{1 + u(t)^2} = \frac{1}{t}.$$

Integroimalla saadaan

$$\int \frac{u'(t)u(t)}{1 + u(t)^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C.$$

Vasemmanpuolisessa integraalissa tehdään sijoitus $u(t) = v$ jolloin $u'(t) dt = dv$ ja

$$\int \frac{u'(t)u(t)}{1 + u(t)^2} dt = \int \frac{v}{1 + v^2} dv = \frac{1}{2} \ln(1 + v^2) = \frac{1}{2} \ln(1 + u(t)^2).$$

(Vakiota ei tarvitse tänne kirjoittaa, koska se tulee yhtälön oikealta puolelta.) Näin ollen

$$\frac{1}{2} \ln(1 + u(t)^2) = \ln(t) + C,$$

eli

$$1 + u(t)^2 = e^{2 \ln(t) + 2C} = t^2 e^{2C},$$

josta saadaan

$$u(t) = \pm \sqrt{t^2 e^{2C} - 1}.$$

Sijoittamalla $t = 1$ todetaan, että ainoastaan $+$ kelpaa ja $2 = \sqrt{e^{2C} - 1}$ josta päätellään, että $e^{2C} = 5$. Yhtälön ratkaisu on siis

$$y(t) = t\sqrt{5t^2 - 1}.$$

Koska aina on oltava $5t^2 - 1 \geq 0$ nähdään, että tämä on ratkaisu ainoastaan kun $t \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

4. Oletetaan, että funktiolle f pätee

$$|f(t, x) - f(t, z)| \leq L|x - z|, \quad t \geq 0, \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) = y_0,$$

on korkeintaan yksi ratkaisu.

Ratkaisu: Oletetaan, että y_1 ja y_2 ovat kaksi ratkaisua. Integroimalla saadaan $y_j(t) - y_j(0) = \int_0^t f(s, y_j(s)) \, ds$, $j = 1, 2$, ja tästä seuraa oletusten nojalla, että

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &= \left| \int_0^t (f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))) \, ds \right| \\ &\leq \int_0^t |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| \, ds \leq L \int_0^t |y_2(s) - y_1(s)| \, ds. \end{aligned}$$

Merkitään $v(t) = \int_0^t |y_2(s) - y_1(s)| \, ds$ jolloin siis pätee, että

$$v'(t) = |y_2(t) - y_1(t)| \leq Lv(t), \quad t \geq 0.$$

Jos nyt $w(t) = e^{-Lt}v(t)$, niin

$$w'(t) = -Le^{-Lt}v(t) + e^{-Lt}v'(t) \leq -Le^{-Lt}v(t) + e^{-Lt}Lv(t) \leq 0.$$

Näin ollen $w(t) = w(0) + \int_0^t w'(s) \, ds \leq w(0) = v(0) = 0$, ja koska $v(t)$ ja $e^{-Lt} \geq 0$ niin seuraa, että $v(t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$. Koska $|y_2(t) - y_1(t)| \leq Lv(t)$ niin pätee myös $|y_2(t) - y_1(t)| = 0$ eli $y_1(t) = y_2(t)$ kaikilla $t \geq 0$.

5. Olkoon f jatkuva funktio reaaliakselilla siten, että $f(y) = 0$ kun $y \leq 0$ ja $f(y) > 0$ kun $y > 0$. Millä ehdolla differentiaaliyhtälön $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$ ratkaisu $y(t) = 0$, $t \geq 0$ ei ole yksikäsitteinen.

Ratkaisu: Oletetaan ensin, että löytyy ratkaisu jolle pätee $y(t) > 0$ kun $t > 0$ mutta $y(0) = 0$. Silloin

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1$$

ja integroimalla saadaan

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{f(y(s))} \, ds = \int_0^t 1 \, ds = t.$$

Jos ensimmäisessä integraalissa tehdään muuttujan vaihto $y(s) = u$ niin $y'(s) \, ds = du$, $u = y(0) = 0$ kun $s = 0$ ja $u = y(t)$ kun $s = t$. Näin ollen saadaan

$$H(y(t)) = t \quad \text{eli} \quad y(t) = H^{-1}(t),$$

missä $H(z) = \int_0^z \frac{1}{f(u)} \, du$. Tämähän onnistuu ainoastaan jos H on hyvin määritelty funktio, eli integraali on olemassa, mikä ei ole itsestään selvää koska $\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{1}{f(u)} = +\infty$. Mutta jos tämä integraali on olemassa, niin silloin H on jatkuvasti derivoituva ja aidosti kasvava funktio kun $z > 0$, joten sillä on käänteisfunktio ja jos y määritellään kaavalla $y(t) = H^{-1}(t)$ kun $t > 0$ ja $y(t) = 0$ kun $t \leq 0$ niin käänteisfunktio derivaatan kaavasta seuraa, että $y'(t) = f(y(t))$ kun $t > 0$. Koska 0 on myös differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis löydetty ainakin kaksi ratkaisua. Riittävä (ja myös välttämätön) ehto sille ettei ratkaisu ole yksikäsitteinen on siis että $\int_0^z \frac{1}{f(u)} \, du < \infty$ kun $z > 0$. Huomaa myös, että tässä tapauksessa löytyy äärettömän monta ratkaisua, koska jos $t_0 \geq 0$ ja $y(t) = 0$ kun $0 \leq t \leq t_0$ ja $y(t) = H^{-1}(t - t_0)$ kun $t > t_0$ on yhtälön ratkaisu.

6. Käyrä $y = f(x)$, $x \geq 0$ (eli $x = k(y)$) missä $f(0) = 0$ ja $f(x) > 0$ (sekä $f'(x) > 0$) kun $x > 0$ pyörähtää y akselin ympäri jolloin syntyy vesiastia. Määritä funktio f siten, että jos astiaan tehdään reikä pisteessä $x = 0$ niin että vesi virtaa ulos, niin veden korkeus laskee vakionopeudella.

Ratkaisu: Ensinnä yritetään päätellä millä nopeudella vesi virtaa ulos jos vedenpinnan korkeus (reiästä laskettuna) on h : Jos pieni massa Δm virtaa ulos niin potentiaalienergia pienenee $\Delta m h g$ verran ja liikeenergia kasvaa $\frac{1}{2} \Delta m v^2$ verran ja jos oletetaan, että potentiaalienergian ja liike-energian summa pysyy vakiona niin saadaan

$$\Delta m h g = \frac{1}{2} \Delta m v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

Jos hetkellä t vedenpinnan korkeus on $y(t)$ ja vedenpinnan pinta-ala on $A(y(t))$ niin aikavälillä $(t, t + \Delta t)$ astiassa oleva vesimäärä pienenee noin $A(y(t))(y(t) - y(t + \Delta t))$ jos tarkastellaan vedenpinnan muutosta. Koska vesi virtaa ulos nopeudella $\sqrt{2gy(t)}$ voidaan myös olettaa että ulos virrannut vesimäärä on $c\sqrt{2gy(t)}\Delta t$ missä c on vakio joka riippuu mm. reiän poikkipinta-alasta. Näin ollen saadaan

$$A(y(t))(y(t) - y(t + \Delta t)) \approx c\sqrt{2gy(t)}\Delta t,$$

ja tästä seuraa, kun jaetaan Δt :llä ja annetaan $\Delta t \rightarrow 0$ että

$$y'(t) = -c\sqrt{2g}\frac{\sqrt{y(t)}}{A(y(t))}.$$

Tässä tapauksessa kun astia on pyörähdyspinta niin $A(y) = \pi k(y)^2$. Jos nyt halutaan että vedenpinta laskee tasaisella nopeudella niin g on valittava niin, että $\frac{\sqrt{y}}{k(y)^2}$ on vakio, eli $k(y) = ay^{\frac{1}{4}}$. Tästä taas seuraa, että funktio f on valittava siten, että $f(x) = bx^4$.

7. On rakennettava pyörähdysymmetrinen pylväs, jonka korkeus on h ja yläpään ympyrän säde on r . Pylvään yläpään vaikuttaa voima F (alaspäin) ja se on tasaisesti jakautunut tälle r -säteiselle pinnalle. Määritä pylvään muoto jos halutaan että puristusjännitys (joka siis johtuu ulkoisesta voimasta F ja pylvään painosta) on joka korkeudella sama ja pylvään materiaalin tiheys on ρ .

Ratkaisu: Olkoon $y(x)$ pylvään säde korkeudella x , jolloin siis $y(h) = r$ ja haetaan $y(x)$ kun $0 \leq x \leq h$. Pylvään yläpäässä jännitys on $\sigma = \frac{F}{\pi r^2}$. Oletuksen mukaan jännitys on sama myös korkeuksilla x ja $x - \Delta x$. Korkeudella $x - \Delta x$ pylväs kantaa korkeudella x vaikuttavan voiman ja tornin massan välillä $(x - \Delta x, x)$. Tästä seuraa, että

$$\sigma = \frac{\pi y(x)^2 \sigma + \int_{x-\Delta x}^x \pi y(s)^2 \rho g \, ds}{\pi y(x - \Delta x)^2} \approx \frac{y(x)^2 \sigma + y(x)^2 \rho g \Delta x}{y(x - \Delta x)^2}.$$

Tästä seuraa, että

$$\sigma(y(x)^2 - y(x - \Delta x)^2) \approx -\rho g y(x)^2 \Delta x,$$

ja kun $\Delta x \rightarrow 0$ tästä saadaan

$$2\sigma y(x)y'(x) = -\rho g y(x)^2 \quad \text{eli} \quad y'(x) = -\frac{\rho g}{2\sigma} y(x).$$

Tästä taas seuraa, että

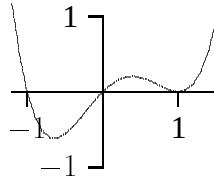
$$y(x) = e^{-\frac{\rho g}{2\sigma} x} c$$

ja sijoittamalla $x = h$ saadaan $r = y(h) = e^{-\frac{\rho g}{2\sigma}h}c$ eli $c = re^{\frac{\rho g}{2\sigma}h}$ ja saadaan

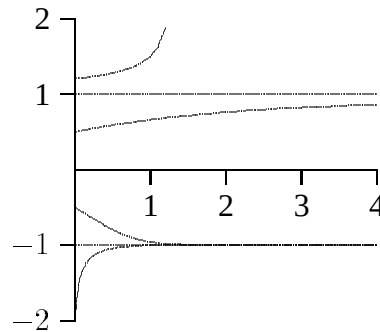
$$y(x) = re^{\frac{\rho g \pi r^2}{2F}(h-x)}, \quad 0 \leq x \leq h.$$

8. Olkoon $y(t)$ yhtälön $y' = (y^2 + y)(y^2 - 2y + 1)$, $y(0) = a$ ratkaisu. Onko yhtälöllä asympotoottisesti stabiili vakioratkaisu? Hahmottele ratkaisuparven kuvaajat.

Ratkaisu: Funktion $f(x) = (x^2 + x)(x^2 - 2x + 1)$ kuvaaja näyttää suunnilleen seuraavanlaiselta:



Tästä nähdään, että $f(x) > 0$ kun $x < -1$, $0 < x < 1$ ja $x > 1$, joten niillä t -väleillä missä $y(t) < -1$, $0 < y(t) < 1$ ja $y(t) > 1$ niin y on aidosti kasvava. Vastaavasti $f(x) < 0$ kun $-1 < x < 0$ joten sellaisella välillä missä $-1 < y(t) < 0$ funktio y on aidosti vähenevä. Tästä voidaan päätellä, että $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -1$ jos $y(0) < -1$ tai jos $-1 < y(0) < 0$, ja $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \neq 1$ jos $y(0) > 1$, koska siinä tapauksessa on olemassa t_0 siten, että $\lim_{t \rightarrow t_0-} y(t) = +\infty$, eli ratkaisu ei ole edes olemassa kaikilla $t \geq 0$. Tästä päätellään, että ainoastaan -1 on asympotoottisesti stabiili vakioratkaisu. Ratkaisut näyttävät suunnilleen seuraavanlaisilta:



9. Olkoon f jatkuva funktio, jolle pätee $f(y_*) = 0$ ja $f(x) > 0$ kun $y_* - \delta < x < y_*$ ja $f(x) < 0$ kun $y_* < x < y_* + \delta$, missä δ on jokin positiivinen luku. Osoita, että jos $|y(0) - y_*| < \delta$ ja $y(t)$ on differentiaaliyhtälön $y'(t) = f(y(t))$ ratkaisu kun $t \geq 0$ niin $|y(t) - y_*| < \delta$ kaikilla $t \geq 0$ ja $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_*$, eli y_* on asympotoottisesti stabiili vakioratkaisu. (Stabiilisuuden määritelmässä vaaditaan että jokaisella $\epsilon > 0$ pitää löytyä $\delta > 0$ siten että jos $|y(0) - y_*| < \delta$ niin $|y(t) - y_*| < \epsilon$ mutta tässä yhden yhtälön tapauksessa voidaan siis valita $\delta = \epsilon$.)

Ratkaisu: Oletetaan, että $y(0) < y_*$; toinen vaihtoehto on aivan symmetrinen. Osoitetaan ensin, että $y(t) \leq y_*$ kaikilla $t \geq 0$: Tehdään vastaoletus, jonka mukaan on olemassa piste $t_1 \geq 0$ siten, että $y(t_1) > y_*$. Merkitään $t_0 = \sup\{t \mid 0 \leq t \leq t_1, y(t) \leq y_*\}$. Koska $y(0) < y_*$ niin tämä joukko ei ole tyhjä ja jatkuvuuden perusteella $0 < t_0 < t_1$ ja $y(t_0) = 0$. Väliarvolauseen nojalla $y(t_1) - y(t_0) = y'(t_*)(t_1 - t_0)$ missä $t_0 < t_* < t_1$ josta seuraa, että $y(t_*) > y_*$ ja siten $y'(t_*) < 0$ josta saadaan $y(t_1) < y(t_0)$ mikä on ristiriita. Näin ollen on osoitettu, että niin kauan kun ratkaisu on olemassa niin $y(t) \leq y_*$.

Tästä seuraa, että jos $\tau \geq 0$ on sellainen, että $y(t) > y_* - \delta$ kun $0 \leq t \leq \tau$ niin $y(t)$ on ei-vähenevä välillä $[0, \tau]$ ja $y(t) \geq y(0) > y_* - \delta$ kaikilla $t \in [0, \tau]$ josta päätellään, että

$y(0) \leq y(t) \leq y_*$ kaikilla $t \geq 0$ ja $y(t)$ on ei-vähenevä. Tästä seuraa, että $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ on olemassa ja tämä raja-arvo on korkeintaan y_* . Oletetaan, että se on $y_\infty < y_*$. Koska f on jatkuva on olemassa luku $\eta > 0$ siten, että $f(x) \geq \eta$ kun $y(0) \leq x \leq y_\infty$. Väliarvolauseen perusteella nähdään silloin, että $y(t) - y(0) = y'(s)(t-0) = f(y(s))t \geq \eta t$ joten $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y(0)) = \infty$ mikä on ristiriita. Täten kaikki väitteet ovat tulleet todistetuiksi.

Lineaariset differentiaaliyhtälöt

10. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Ratkaisu: Oletetaan, että y on yhtälön ratkaisu, vaihdetaan t muuttujaksi s , (eli kirjoitetaan $y'(s) + a(s)y(s) = f(s)$) kerrotaan yhtälön molemmat puolet funktiolla $e^{\int_{t_0}^s a(r) dr}$ ja integroidaan välin $[t_0, t]$ jolloin saadaan:

$$\int_0^t \left(y'(s) e^{\int_{t_0}^s a(r) dr} + y(s) a(s) e^{\int_{t_0}^s a(r) dr} \right) ds = \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(r) dr} f(s) ds.$$

Koska $\frac{d}{ds} e^{\int_{t_0}^s a(r) dr} = a(s) e^{\int_{t_0}^s a(r) dr}$ niin tulosäännön nojalla vasemmanpuolinen integraali on

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left(y(s) e^{\int_{t_0}^s a(r) dr} \right) ds = \int_{t_0}^t y(s) e^{\int_{t_0}^s a(r) dr} ds = y(t) e^{\int_{t_0}^t a(r) dr} - y(t_0) e^0.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int_{t_0}^t a(r) dr} y_0 + e^{-\int_{t_0}^t a(r) dr} \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s a(r) dr} f(s) ds \\ &= e^{-\int_{t_0}^t a(r) dr} y_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(r) dr} f(s) ds. \end{aligned}$$

11. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$xy'(x) - y(x) = x^2 \sin(x), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Ratkaisu: Kirjoitetaan ensin yhtälö muotoon

$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = x \sin(x).$$

Jos molemmat puolet kerrotaan funktiolla $e^{\int (-\frac{1}{t}) dt} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$ niin yhtälön vasen puoli tulee olemaan derivaatta. Jos näin tehdään, niin yhtälöksi tulee

$$\frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) = \sin(x),$$

ja koska $\frac{d}{dx} \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x)$ niin tämä yhtälö voidaan todella kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x}y(x) = \sin(x).$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{d}{dt} \frac{1}{t} y(t) dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin(t) dt, \Rightarrow \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{t} y(t) dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x (-\cos(t)) dt, \Rightarrow \\ \frac{1}{x} y(x) - \frac{2}{\pi} y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \Rightarrow \\ y(x) &= \frac{2x}{\pi} \pi - x \cos(x) + 0 = 2x - x \cos(x).\end{aligned}$$

12. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'(t) + 4y(t) = 16t + 10 \sin(2t)$ alkuehdolla $y(0) = 1$.

Ratkaisu: Homogeeninen yhtälö on

$$y'(t) + 4y(t) = 0,$$

ja sen karakteristinen yhtälö on $r + 4 = 0$ joten homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_h(t) = ce^{-4t}.$$

Haetaan epähomogeenisen yhtälön ratkaisu muodossa

$$y_p(t) = A + Bt + C \sin(2t) + D \cos(2t),$$

ja koska $y'_p(t) = B + 2C \cos(2t) - 2D \sin(2t)$ saadaan

$$B + 2C \cos(2t) - 2D \sin(2t) + 4A + 4Bt + 4C \sin(2t) + 4D \cos(2t) = 16t + 10 \sin(2t).$$

Tämä yhtälö toteutuu jos

$$B + 4A = 0,$$

$$4B = 16,$$

$$2C + 4D = 0,$$

$$4C - 2D = 10,$$

ja ratkaisuksi saadaan $B = 4$, $A = -1$, $D = -1$ ja $C = 2$ joten

$$y_p(t) = -1 + 4t + 2 \sin(2t) - \cos(2t).$$

Yhtälön yleinen ratkaisu on silloin

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = ce^{-4t} - 1 + 4t + 2 \sin(2t) - \cos(2t).$$

Sijoittamalla $t = 0$ saadaan $1 = c - 1 - 1$ josta seuraa, että $c = 3$. Ratkaisu on siis $y(t) = 3e^{-4t} - 1 + 4t + 2 \sin(2t) - \cos(2t)$.

13. Säiliössä on 400 litraa nestettä O, jossa on 3 % ainetta A hetkellä $t = 0$. Säiliöön pumpataan nestettä O, jossa on 6 % ainetta A nopeudella 3 litraa minuutissa ja säiliön hyvin sekoitettua sisältöä pumpataan ulos nopeudella 4 litraa minuutissa. Paljonko ainetta A on (prosentteissa) säiliössä 40 minuutin kuluttua?

Ratkaisu: Aikayksiköksi valitaan minuutti ja $y(t)$ on säiliössä olevan aineen A määrä hetkellä t . Säiliön nestemäärä on $V(t) = 400 + (3 - 4)t$ kun $0 \leq t \leq 400$ (jonka jälkeen se on tyhjä). Näin ollen $y(0) = \frac{3}{100}400 = 12$

Tarkastellaan mitä tapahtuu aikavälillä $(t, t + \Delta t)$. Sisään tulee $\frac{6 \cdot 3}{100}\Delta t$ ja ulos menee noin $\frac{4}{V(t)}y(t)\Delta t$. Näin ollen

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx \frac{18}{100}\Delta t - \frac{4}{400 - t}y(t)\Delta t,$$

ja kun jaetaan Δt :lla ja annetaan $\Delta t \rightarrow 0$ niin saadaan

$$y'(t) = \frac{18}{100} - \frac{4}{400 - t}y(t).$$

Tämä on lineaarinen yhtälö ja ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int_0^t \frac{4}{400-s} ds} 12 + \int_0^t e^{-\int_s^t \frac{4}{400-r} dr} \frac{9}{50} ds \\ &= e^{\int_0^t 4 \ln(400-s) ds} + \int_0^t e^{\int_s^t 4 \ln(400-r) dr} \frac{9}{50} ds \\ &= \left(1 - \frac{t}{400}\right)^4 12 + \int_0^t \left(1 - \frac{t}{400}\right)^4 \left(1 - \frac{s}{400}\right)^{-4} \frac{9}{50} ds \\ &= \left(1 - \frac{t}{400}\right)^4 12 + \int_0^t \frac{9 \cdot 400}{3 \cdot 50} \left(1 - \frac{t}{400}\right)^4 \left(1 - \frac{s}{400}\right)^{-3} ds \\ &= \left(1 - \frac{t}{400}\right)^4 12 + \left(1 - \frac{t}{400}\right)^{4-3} 24 - \left(1 - \frac{t}{400}\right)^4 24 \\ &= 24 \left(1 - \frac{t}{400}\right) - 12 \left(1 - \frac{t}{400}\right)^4. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $y(40) = 24(1 - \frac{1}{10}) - 12(1 - \frac{1}{10})^4 \approx 13.7268$ ja prosenttiosuus on $13.7268/(400 - 40) \approx 0.0381$ eli 3.81 %.

14. Kappaleen jäähtyminen tapahtuu Newtonin jäähtymislain $T'(t) = -a(T(t) - T_0)$ mukaan, missä t on aika, T kappaleen lämpötila, T_0 ympäristön muuttumaton lämpötila ja a on vakio. Oletetaan, että $T_0 = 10^\circ$. Jos tietyllä hetkellä kappaleen lämpötila on 20° ja 20 minuuttia myöhemmin 15° niin milloin kappaleen lämpötila oli 30°

Ratkaisu: Oletetaan, että hetkellä 0 kappaleen lämpötila oli 30° . Differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$T'(t) + aT(t) = aT_0,$$

josta ratkaisukaavalla saadaan

$$T(t) = e^{-at}T(0) + \int_0^t e^{-a(t-s)}aT_0 ds = e^{-at}(T(0) - T_0) + T_0.$$

(Toinen tapa: Ratkaistaan ensin homogeeninen yhtälö $T'(t) + aT(t) = 0$, sen karakteristinen yhtälö on $r + a = 0$ joten yleinen ratkaisu on $y_h(t) = e^{-at}c$. Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisuksi kelpaa $y_p(t) = T_0$ joten yleinen ratkaisu on $y(t) = e^{-at}c + T_0$ ja sijoittamalla $t = 0$ saadaan edellä esitetty ratkaisu.)

Oletetaan, että lämpötilaksi mitataan 20° hetkellä t_0 jolloin siis

$$20 = e^{-at_0}(30 - 10) + 10.$$

Hetkellä $t_0 + 20$ lämpötila on 15° eli

$$15 = e^{-a(t_0+20)}(30 - 10) + 10.$$

Ottamalla logaritmeja saadaan

$$-at_0 = \ln\left(\frac{10}{20}\right) = -0.6931,$$

$$-a(t_0 + 20) = \ln\left(\frac{5}{20}\right) = -1.3863.$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{t_0}{t_0 + 20} = \frac{0.6931}{1.3863} = 0.5$$

josta saadaan $t_0 = 20$, eli 20 minuuttia ennen ensimmäistä mittausta lämpötila oli 30° .
