

Divergenssi ja roottori

1. Laske funktion $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + z^2)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$ divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{f}$ ja roottori $\nabla \times \mathbf{f}$.

Ratkaisu: Divergenssi on

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ((x^2 + z^2)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}) \\ = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + z^2) + \frac{\partial}{\partial y}xyz + \frac{\partial}{\partial z}(x + y + z) = 2x + xz + 1 \end{aligned}$$

ja roottori on

$$\begin{aligned} \nabla \times ((x^2 + z^2)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2 + z^2) & xyz & (x + y + z) \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & (x + y + z) \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2 + z^2) & (x + y + z) \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ (x^2 + z^2) & xyz \end{vmatrix} \\ &= (1 - xy)\mathbf{i} + (2z - 1)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}. \end{aligned}$$

2. Olkoon $\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ jatkuvasti derivoituva vektorifunktio. Olkoot funktiot $X(t)$ ja $Y(t)$ differentiaaliyhtälösystemin

$$\begin{aligned} X'(t) &= f(X(t), Y(t)), \\ Y'(t) &= g(X(t), Y(t)), \end{aligned}$$

ratkaisu. Jos $A \subset \mathbb{R}^2$ on annettu (esim. avoin) joukko niin määritellään

$$A_T = \{ (x, y) \mid X(T) = x, Y(T) = y \text{ jollain alkuarvolla } (X(0), Y(0)) \in A \}.$$

Osoita, että jos $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ niin A_T :n pinta-ala on sama kuin A :n pinta-ala. (Kolmessa ulottuvuudessa tilavuus säilyy muuttumattomana ja jos $\mathbf{F}$ on jonkin nesteen nopeuskenttä niin tämä neste on puristumaton jos $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.)

Ratkaisu: Kirjoitetaan $X(0) = u$ ja $Y(0) = v$. Voidaan osoittaa, (mutta tätä ei tehdä nyt) että oletus, että $\mathbf{F}$ on jatkuvasti derivoituva takaa sen, että kuvaus $(u, v) \mapsto (x(T), y(T))$ on bijektio. Joukon A pinta-ala on $\iint_A 1 \, du \, dv$ ja joukon A_T pinta-ala on $\iint_{A_T} dx \, dy$. Nyt on laskettava determinantti $\frac{\partial(X(T), Y(T))}{\partial(u, v)}$. Yhtälösystemin ratkaisut $X(t)$ ja $Y(t)$ riippuvat muuttujan t lisäksi alkuarvoista $X(0) = u$ ja $Y(0) = v$ ja merkitään X_u :lla, X_v :llä jne. osittaisderivaatat u :n ja v :n suhteen. Derivoimalla saadaan differentiaaliyhtälösystemi

$$\begin{aligned} X'_u(t) &= f_x(X(t), Y(t))X_u(t) + f_y(X(t), Y(t))Y_u(t), & X_u(0) &= 1, \\ X'_v(t) &= f_x(X(t), Y(t))X_v(t) + f_y(X(t), Y(t))Y_v(t), & X_v(0) &= 0, \\ Y'_u(t) &= g_x(X(t), Y(t))X_u(t) + g_y(X(t), Y(t))Y_u(t), & Y_u(0) &= 0, \\ Y'_v(t) &= g_x(X(t), Y(t))X_v(t) + g_y(X(t), Y(t))Y_v(t), & Y_v(0) &= 1. \end{aligned}$$

Suoraviivaisella laskulla todetaan, että

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(X_u(t)Y_v(t) - X_v(t)Y_u(t)) &= X'_u(t)Y_v(t) + X_u(t)Y'_v(t) - X'_v(t)Y_u(t) - X_v(t)Y'_u(t) \\ &= (f_x(X(t), Y(t))X_u(t) + f_y(X(t), Y(t))Y_u(t))Y_v(t) + X_u(t)(g_x(X(t), Y(t))X_v(t) \\ &\quad + g_y(X(t), Y(t))Y_v(t)) - (f_x(X(t), Y(t))X_v(t) + f_y(X(t), Y(t))Y_v(t))Y_u(t) \\ &\quad - X_v(t)(g_x(X(t), Y(t))X_u(t) + g_y(X(t), Y(t))Y_u(t)) \\ &= (f_x(X(t), Y(t)) + g_y(X(t), Y(t)))(X_u(t)Y_v(t) - X_v(t)Y_u(t)).\end{aligned}$$

Jos nyt $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ niin $f_x(X(s), Y(s)) + g_y(X(s), Y(s)) = 0$ ja $\frac{d}{dt}(X_u(t)Y_v(t) - X_v(t)Y_u(t)) = 0$ kaikilla t joten alkuravoista seuraa, että

$$(X_u(t)Y_v(t) - X_v(t)Y_u(t)) = (X_u(0)Y_v(0) - X_v(0)Y_u(0)) = 1.$$

Näin ollen

$$\frac{\partial(X(T), Y(T))}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} X_u(T) & X_v(T) \\ Y_u(T) & Y_v(T) \end{pmatrix} = X_u(T)Y_v(T) - X_v(T)Y_u(T) = 1,$$

ja muuttujan vaihdolla todetaan, että $\iint_A 1 \, du \, dv = \iint_{A_T} 1 \, dx \, dy$.

Greenin lause

3. Olkoon $\mathbf{f}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$. Laske $\iint_K (Q_x(x, y) - P_y(x, y)) \, dx \, dy$ kun K on kolmio $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b - \frac{b}{a}x\}$.

Ratkaisu: Joukko K voidaan myös esittää muodossa $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq a - \frac{a}{b}y\}$. Lasketaan ensin

$$\begin{aligned}\iint_K Q_x(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^b \int_0^{a - \frac{a}{b}y} Q_x(x, y) \, dx \, dy = \int_0^b \int_0^{a - \frac{a}{b}y} Q(x, y) \, dx \\ &= \int_0^b Q(a - \frac{a}{b}y, y) \, dy - \int_0^b Q(0, y) \, dy.\end{aligned}$$

Aivan vastaavanlaisella laskulla todetaan, että

$$-\iint_K P_y(x, y) \, dx \, dy = -\int_0^a P(x, b - \frac{b}{a}x) \, dx + \int_0^a P(x, 0) \, dx.$$

Joukon K reuna positiiviseen suuntaan otettuna on $\partial K = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ missä C_1 on jana pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(a, 0)$, C_2 on jana pisteestä $(a, 0)$ pisteeseen $(0, b)$ ja C_3 on jana pisteestä $(0, b)$ pisteeseen $(0, 0)$.

Janalle C_1 voidaan valita parametriesitys $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$, $t \in [0, a]$ jolloin $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}$ ja

$$\int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^a (P(t, 0)\mathbf{i} + Q(t, 0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} \, dt = \int_0^a P(x, 0) \, dx.$$

Janalle C_2 voidaan valita parametriesitys $\mathbf{r}(t) = (a-t)\mathbf{i} + (b-\frac{b}{a}(a-t))\mathbf{j}$, $t \in [0, a]$. Silloin

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^a (P(a-t, b-\frac{b}{a}(a-t))\mathbf{i} + Q(a-t, b-\frac{b}{a}(a-t))) \cdot (-\mathbf{i} + \frac{b}{a}\mathbf{j}) dt \\ &= -\int_0^a P(a-t, b-\frac{b}{a}(a-t)) dt + \frac{b}{a} \int_0^a Q(a-t, b-\frac{b}{a}(a-t)) dt \\ &= -\int_0^a P(x, b-\frac{b}{a}x) dx + \int_0^b Q(a-\frac{a}{b}y, y) dy,\end{aligned}$$

kun tehdään muuttujan vaihdot $a-t=x$ ja $b-\frac{b}{a}(a-t)=y$.

Janalle C_3 voidaan valita parametriesitys $\mathbf{r}(t) = (b-t)\mathbf{j}$, $t \in [0, b]$ jolloin $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{j}$ ja

$$\int_{C_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^b (P(0, b-t)\mathbf{i} + Q(0, b-t)\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{j}) dt = -\int_0^b Q(0, y) dy,$$

kun tehdään muuttujan vaihto $b-t=y$.

Näin ollen todetaan, että

$$\iint_K (Q_x(x, y) - P_y(x, y)) dx dy = \iint_K \nabla \times \mathbf{f} \cdot \mathbf{k} dA = \oint_{\partial K} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

4. Oleta tunnetuksi Greenin lause $\iint_D (Q_x(x, y) - P_y(x, y)) dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ kun $\mathbf{f}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$. Jos tämä kaava sovelletaan funktioon $\mathbf{g}(x, y) = -Q(x, y)\mathbf{i} + P(x, y)\mathbf{j}$ niin mikä on tulos?

Ratkaisu: Greenin lauseen mukaan pätee

$$\oint_{\partial D} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (P_x(x, y) - (-Q_y(x, y))) dx dy = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{f} dA$$

Olkoon käyrän ∂D parametriesitys $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ jolloin siis $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}) dt$. Silloin

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (-Q(x, y)\mathbf{i} + P(x, y)\mathbf{j}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}) dt \\ &= \int_a^b (P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}) \cdot (y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}) dt.\end{aligned}$$

Koska $(x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}) \perp (y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j})$ niin voidaan päätellä, että $(y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}) dt = \mathbf{n} ds$ missä $\mathbf{n}$ on käyrän ∂D yksikkönormaali. Lisäksi ei ole kovin vaikeata nähdä, että jos ∂D :n suunta valitaan siten, että D jää vasemmalle ylhäältä päin katsottuna, niin $\mathbf{n}$ on normaali ulospäin. Näin on siis saatu tulos

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{f} dA = \oint_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds.$$

5. Monikulmion Ω kärkipisteet ovat (x_j, y_j) missä $j = 0, 1, \dots, n$ ja $x_0 = x_n$ ja $y_0 = y_n$. Määritä monikulmion pinta-ala Greenin lauseen avulla.

Ratkaisu: Jos esimerkiksi $\mathbf{f}(x, y) = x\mathbf{j}$, $\mathbf{f}(x, y) = -y\mathbf{i}$ tai $\mathbf{f}(x, y) = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ niin $(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{k} = 1$ ja Greenin lauseen nojalla

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Omega} 1 \, dA = \Omega\text{:n pinta-ala.}$$

Tarkastellaan tässä tapausta, missä $\mathbf{f}(x, y) = x\mathbf{j}$. Olkoon C_j jana pisteestä (x_{j-1}, y_{j-1}) pisteeseen (x_j, y_j) . Silloin

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \pm \sum_{j=1}^n \int_{C_j} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r},$$

missä merkki on valittava siten, että kierretään joukkoa Ω positiiviseen suuntaan. Janalle C_j saadaan parametriesitys $\mathbf{r}(t) = (1-t)(x_{j-1}\mathbf{i} + y_{j-1}\mathbf{j}) + t(x_j\mathbf{i} + y_j\mathbf{j})$, $t \in [0, 1]$ joten $\mathbf{r}'(t) = (x_j - x_{j-1})\mathbf{i} + (y_j - y_{j-1})\mathbf{j}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_{C_j} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 ((1-t)(x_{j-1} + tx_j))\mathbf{j} \cdot ((x_j - x_{j-1})\mathbf{i} + (y_j - y_{j-1})\mathbf{j}) \, dt \\ &= \int_0^1 ((1-t)(x_{j-1} + tx_j))(y_j - y_{j-1}) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(-(1-t)^2(x_{j-1} + tx_j))(y_j - y_{j-1}) \, dt = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Pinta-alaksi tulee silloin

$$\pm \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)(y_j - y_{j-1}).$$

Gaussin ja Stokesin lauseet

6. Laske $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, missä $\mathbf{F} = (x + yz)\mathbf{i} + (z^2 + 2x + y^3)\mathbf{j} + (y^2 - z^2)\mathbf{k}$ ja C on yksikköympyrä tasossa $z = 5$ (positiiviseen suuntaan z -akselin positiivisesta suunnasta katsottuna) käyttäen Stokesin lausetta.

Ratkaisu: Stokesin lauseen mukaan $\iint_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ kun ∂S kierretään positiiviseen suuntaan eli S jää vasemmalle $\mathbf{n}$:n osoittamasta suunnasta katsottuna. Tässä tapauksessa $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Nyt

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x + yz) & (z^2 + 2x + y^3) & (y^2 - z^2) \end{vmatrix} = (2y - 2z)\mathbf{i} - (0 - y)\mathbf{j} + (2 - z)\mathbf{k}.$$

Koska A on joukko $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 5\}$ niin $\mathbf{n} \, dS = \mathbf{k} \, dx \, dy$ ja

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S ((2y - 2z)\mathbf{i} - (0 - y)\mathbf{j} + (2 - z)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \, dS \\ &\stackrel{z=5}{=} \iint_S (-3) \, dS = -3\pi, \end{aligned}$$

koska yksikköympyrän sisäpuolelle jäävän alueen pinta-ala on π .

7. Laske $\oint_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$ Stokesin lausetta käyttäen, missä C on pintojen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ja $x + y + z = 0$ leikkauskäyrä (positiiviseen suuntaan z -akselin positiivisesta suunnasta katsottuna).

Vihje: Pintaintegraalin voit laskea suoraan käyttämättä parametrisointia koska normaali on vakio ja pinnan pinta-alan laskemiseksi voidaan käyttää symmetriaa ja palauttaa se ympyrän pinta-alan laskuksi.

Ratkaisu: Stokesin lauseen mukaan $\iint_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ kun ∂A kierretään positiiviseen suuntaan eli A jää vasemmalle $\mathbf{n}$:n osoittamasta suunnasta katsottuna. Tässä tapauksessa $A = \{ (x, y, z) \mid x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \}$ ja $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ joten

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Koska tason $x + y + z = 0$ yksikkönormaali (joka osoittaa z -akselin positiiviseen suuntaan) on $\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ niin $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\sqrt{3}$ ja

$$\iint_A \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\sqrt{3}a(A),$$

missä $a(A)$ on A :n pinta-ala. Symmetrian nojalla nähdään, että A :n pinta-ala on a -säteisen ympyrän pinta-ala, eli πa^2 . Käyräintegraalin arvo on siis $-\pi\sqrt{3}a^2$.

8. Olkoon A pinta $x^2 + y^2 = z^2(1 - z)^2$, $0 \leq z \leq 1$. Määritä divergenssilauseen (eli Gaussin lauseen) avulla integraali $\iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$, kun $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$.

Ratkaisu: Koska A on joukon $B = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z^2(1 - z)^2, 0 \leq z \leq 1 \}$ reuna, niin divergenssilauseen nojalla $\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$ ja jos $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ niin $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 2x - x - x = 0$ ja $\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$.

9. Käytä Gaussin lausetta pintaintegraalin $\iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ laskemiseksi, missä $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ja A on (sylinteri)pinta $x^2 + z^2 = 9$, $0 \leq y \leq 8$. Huomaa, että jos $\Omega = \{ (x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq y \leq 8 \}$ niin Ω :n reuna $\partial\Omega = A \cup A_1 \cup A_2$ missä $A_1 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq 9, y = 8 \}$ (ja normaali $\mathbf{n} = \mathbf{j}$) ja $A_2 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq 9, y = 0 \}$ (ja normaali $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$).

Ratkaisu: Divergenssilauseen mukaan

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{A_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{A_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Tässä tapauksessa $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 3$ ja

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 3V(\Omega) = 3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 9 = 216\pi.$$

Pinnalla A_1 funktio $\mathbf{F}$ on $x\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ joten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 8$ ja $\iint_{A_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 8a(A_1) = 8 \cdot \pi \cdot 9 = 72\pi$. Vastaavasti pinnalla A_2 funktio $\mathbf{F}$ on $x\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ joten $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ ja $\iint_{A_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$. Näin ollen

$$\iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 216\pi - 72\pi = 144\pi.$$

10. Käytä Gaussin lausetta pintaintegraalin $\iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ laskemiseksi, missä $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + e^{x^2}\mathbf{j} + (1+x+y)\mathbf{k}$ ja A on pinta $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, jonka positiivinen puoli on yläpuoli.

Ratkaisu: Gaussin lauseen mukaan

$$\iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

missä ∂B on joukon B reuna ja $\mathbf{n}$ on ulospäin suunnattu yksikkönormaali. Tässä tapauksessa nähdään helposti, että $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Jos valitaan

$$B = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0 \},$$

niin nähdään, että $\partial B = A \cup A'$ missä

$$A' = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = 0 \},$$

ja yksikkönormaali tällä pinnalla on $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$. Siis,

$$\iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_{A'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_B 0 \, dV = 0,$$

joten

$$\begin{aligned} \iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= - \iint_{A'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (0\mathbf{i} + e^{x^2}\mathbf{j} + (1+x+y)\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{k}) \, dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (1+x+y) \, dx \, dy = 4\pi, \end{aligned}$$

koska symmetrian nojalla on

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} x \, dx \, dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} y \, dx \, dy = 0.$$

Osittaisintegrointi

11. Olkoon $\mathbf{w}$ vektoriarvoinen ja v skalaariarvoinen funktio. Minkälainen osittaisintegrointitulosaadaan soveltamalla divergenssilausesta funktioon $\mathbf{w}v$?

Ratkaisu: Yksinkertainen lasku osoittaa, että $\nabla \cdot (\mathbf{w}v) = (\nabla \cdot \mathbf{w})v + \mathbf{w} \cdot (\nabla v)$. Divergenssilauseen nojalla

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{w}v) \, dV = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{w}v) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{\partial\Omega} v(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

joten

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w})v \, dV + \iiint_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla v) \, dV = \iint_{\partial\Omega} v(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

eli

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w})v \, dV = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v \, dS - \iiint_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla v) \, dV,$$

tai

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla v) \, dV = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v \, dS - \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w})v \, dV.$$

12. Olkoon u osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) + cu = f$$

ratkaisu joukossa Ω ja oletetaan, että u toteuttaa reunaehdot

$$u + \kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = g$$

reunalla $\partial\Omega$ missä siis κ , c , f ja g ovat annettuja funktioita. Jos osittaisdifferentiaaliyhtälön molemmat puolet kerrotaan funktiolla v ja integroidaan Ω :n yli, mikä on tulos?

Ratkaisu: Kun yhtälön molemmat puolet kerrotaan funktiolla v ja integroidaan saadaan

$$\iiint_{\Omega} (-\nabla \cdot (\kappa \nabla u))v \, dV + \iiint_{\Omega} cuv \, dV = \iiint_{\Omega} fv \, dV.$$

Ensimmäisessä termissä suoritetaan osittaisintegrointi jolloin saadaan

$$\iiint_{\Omega} (-\nabla \cdot (\kappa \nabla u))v \, dV = - \iint_{\partial\Omega} v \kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS + \iiint_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, dV.$$

Jos nyt $u + \kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = g$ reunalla $\partial\Omega$ niin $\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = g - u$ ja saadaan yhtälöksi

$$\iiint_{\Omega} (\kappa \nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dV + \iint_{\partial\Omega} uv \, dS = \iiint_{\Omega} fv \, dV + \iint_{\partial\Omega} gv \, dS.$$

Alkuperäisestä yhtälöstä on siis saatu ehto, että edellinen yhtälö pätee ”kaikilla” funktioilla v . Tämän laskun perusteella se ei ole selvää, mutta osoittautuu että yhtälön uusi ns. heikko muoto, on monella tavalla parempi yhtälön ratkaisemisen kannalta.
