28.2.2007

**Käyräintegraalit ja potentiaalifunktiot**

**1.** Olkoon $f(x,y) = x+2y$. Laske $\int_C f\,\mathrm{d}s$ ja $\int_C f\,\mathrm{d}x$ kun $C$ on jana pisteestä $(1,2)$ pisteeseen $(2,4)$.

*Ratkaisu:* Valitaan janan parametriesitykseksi

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)(\mathbf{i}+2\mathbf{j}) + t(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}) = (1+t)\mathbf{i} + (2+2t)\mathbf{j}, \quad t \in [0,1],$$

jolloin $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $x(t) = 1+t$ ja $y(t) = 2+2t$. Nyt $\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$ ja

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (1+t+4+4t)\sqrt{5}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\Big/_0^1 \left(5t+\tfrac{5}{2}t^2\right) = \frac{15\sqrt{5}}{2}.$$

Koska $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t$ ja $\int_C f\,\mathrm{d}x = \int_C (f\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ niin

$$\int_C f\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1+t+4+4t)\,\mathrm{d}t = \Big/_0^1 \left(5t+\tfrac{5}{2}t^2\right) = \frac{15}{2}.$$

---

**2.** Kirjoita integraali, jonka arvo on pintojen $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$, ja $x^2+y^2 = 2x$ leikkauskäyrän pituus.

*Ratkaisu:* Koska (sylinteri)pinnan $x^2+y^2 = 2x$ yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $(x-1)^2+y^2 = 1$ valitaan parametriesitys sellaiseksi, että

$$\begin{aligned} x(t) &= 1+\cos(t), \\ y(t) &= \sin(t), \end{aligned}$$

missä $t \in [0,2\pi]$ ja $z$ ratkaistaan yhtälöstä $x^2+y^2+z^2 = 4$ jolloin saadaan

$$z(t) = \sqrt{4-x(t)^2-y(t)^2} = \sqrt{4-(1+\cos(t))^2-\sin(t)^2} = \sqrt{2(1-\cos(t))}.$$

Vektorimuodossa käyrän parametrisesitys on siis

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k} = (1+\cos(t))\mathbf{i}+\sin(t)\mathbf{j}+\sqrt{2(1-\cos(t))}\mathbf{k}, \quad t \in [0,2\pi],$$

jolloin

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin(t)\mathbf{i}+\cos(t)\mathbf{j}+\frac{\sin(t)}{\sqrt{2(1-\cos(t))}}\mathbf{k}.$$

Leikkauskäyrän pituus on siten

$$\int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin(t)^2+\cos(t)^2+\frac{\sin(t)^2}{2(1-\cos(t))}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1+\frac{\sin(t)^2}{2(1-\cos(t))}}\,\mathrm{d}t \approx 7.64.$$

---

**3.** Millä parametrin $a$ arvoilla funktio eli vektorikenttä $\mathbf{f}(x,y) = (ax^2+x^ay^2)\mathbf{i}+(\sin(y)+x^{a+1}y^a)\mathbf{j}$ on konservatiivinen eli eksakti, ja määritä näillä $a$:n arvoilla kaikki potentiaalifunktiot.

*Ratkaisu:* On mahdollista määrittää $a$:n arvo ehdosta $\frac{\partial}{\partial y}(ax^2 + x^a y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin(y) + x^{a+1}y^a)$ mutta voidaan yhtä hyvin suoraan hakea potentiaalifunktiot ja katsoa millä $a$:n arvoilla tämä onnistuu.

Jos $\varphi(x, y)$ on potentiaalifunktio niin

$$\varphi_x(x, y) = ax^2 + x^a y^2,$$
$$\varphi_y(x, y) = \sin(y) + x^{a+1}y^a.$$

Edellisestä yhtälöstä seuraa, että

$$\varphi(x, y) = \tfrac{a}{3}x^3 + \tfrac{1}{a+1}x^{a+1}y^2 + g(y).$$

Derivoimalla $y$:n suhteen saadaan

$$\varphi_y(x, y) = \tfrac{2}{a+1}x^{a+1}y + g'(y).$$

Nyt on saatu kaksi lauseketta $\varphi_y$:lle joten

$$\sin(y) + x^{a+1}y^a = \tfrac{2}{a+1}x^{a+1}y + g'(y).$$

Tästä voidaan päätellä, että $a = 1$ koska muuten $g'(y)$ ei ole pelkästään $y$:n funktio. Tässä tapauksessa $g'(y) = \sin(y)$ jolloin $g(y) = -\cos(y) + k$, missä $k$ on vakio. Näin ollen potentiaalifunktiot ovat

$$\varphi(x, y) = \tfrac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 - \cos(y) + k,$$

---

**4.** Olkoon $\mathbf{f}(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$. Tarkista, että $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ kun $(x, y) \neq (0, 0)$. Laske $\int_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ missä $C$ on $a$-säteinen, origokeskinen ympyrä (positiivisesti suunnattuna). Onko funktiolla $f$ potentiaalifunktio?

*Ratkaisu:* Yksinkertainen lasku osoittaa, että

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$
$$= \left( \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \mathbf{k}$$
$$= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Jos $C$ on $a$-säteinen ympyrä, niin sen parametriesitykseksi voidaan valita

$$\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{i} + a\sin(t)\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Silloin $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = (-a\sin(t)\mathbf{i} + a\cos(t)\mathbf{j})\,\mathrm{d}t$ ja

$$\int_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{a\sin(t)}{a^2\cos(t)^2 + a^2\sin(t)^2}\mathbf{i} + \frac{a\cos(t)}{a^2\cos(t)^2 + a^2\sin(t)^2}\mathbf{j} \right)$$
$$\cdot (-a\sin(t)\mathbf{i} + a\cos(t)\mathbf{j})\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left( (-\sin(t))^2 + \cos(t)^2 \right) \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Suljetun käyrän yli laskettu käyräintegraali ei siis ole $0$. Yksinkertainen lasku osoittaa, että jos $g(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ niin $\nabla g = \mathbf{f}$, joten funktiolla $\mathbf{f}$ on potentiaalifunktio, mutta se ei ole yksiarvoinen, vaan on mahdollista että saadaan eri tavalla laskien arvoja joiden erotus on kokonaisluku kertaa $2\pi$.

---

## Kaarevuus

**5.** Jos käyrä $\mathbf{q}(s)$, $s \in [0, L]$ on sellainen, että $|\mathbf{q}'(s)| = 1$ (eli ”$s$ on kaarenpituus”) niin sen kaarevuus pisteessä $\mathbf{q}(s)$ on $\kappa(s) = |\mathbf{q}''(s)|$. Määritä käyrän $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ kaarevuus, kun ei välttämättä oleteta, että $|\mathbf{r}'(t)|$ olisi $1$.

*Ratkaisu:* Kaarenpituus määritellään kaavalla $s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(\tau)|\, \mathrm{d}\tau$ jolloin siis $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$. Jos nyt määritellään $\mathbf{q}$ kaavalla $\mathbf{q}(s(t)) = \mathbf{r}(t)$ niin ketjusäänöstä seuraa, että $|\mathbf{q}'(s)| = 1$. Näin ollen

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{q}'(s(t))s'(t) \quad \text{ja} \quad \mathbf{r}''(t) = \mathbf{q}''(s(t))s'(t)^2 + \mathbf{q}'(s(t))s''(t).$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = s'(t)^3 \mathbf{q}'(s) \times \mathbf{q}''(s) + s'(t)s''(t)\mathbf{q}'(s) \times \mathbf{q}'(s).$$

Koska $|\mathbf{q}'(s)| = 1$ niin $|\mathbf{q}'(s)|^2 = 1$ josta derivoimalla saadaan $2\mathbf{q}'(s) \cdot \mathbf{q}''(s) = 0$ eli $\mathbf{q}'(s) \perp \mathbf{q}''(s)$ joten $|\mathbf{q}'(s) \times \mathbf{q}''(s)| = |\mathbf{q}'(s)||\mathbf{q}''(s)|$ ja koska lisäksi $\mathbf{q}'(s) \times \mathbf{q}'(s) = 0$ niin todetaan, että

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = |s'(t)|^3 \kappa(s),$$

eli kaarevuus pisteessä $\mathbf{r}(t)$ on

$$\frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

---

## Pintaintegraalit

**6.** Laske pintaintegraali

$$\iint_B xyz\, \mathrm{d}S,$$

missä

$$B = \{\, (x, y, z) \mid z^2 + 2y^2 \leq 1,\ z = x + y \geq 0 \,\}.$$

*Ratkaisu:* Valitaan parametreiksi $y$ ja $z$ jolloin pinnan parametriesitys on

$$\mathbf{r}(y, x) = (z - y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Silloin

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

ja

$$\mathrm{d}S = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \sqrt{3}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Näin ollen

$$\iint_B xyz\,\mathrm{d}S = \iint_{B'} xyz\sqrt{3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

missä $B' = \{\,(y,z) \mid z^2 + 2y^2 \le 1,\ z \ge 0\,\}$. Siirrytään napakoordinaatteihin $y = \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos(\theta)$ ja $z = r\sin(\theta)$ jolloin $0 \le r \le 1$ ja $0 \le \theta \le \pi$ ja

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)}\right|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

ja

$$\begin{aligned}
\iint_{B'} xyz\sqrt{3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{\pi}\int_0^1 \sqrt{3}\Big(r\sin(\theta) - \tfrac{1}{\sqrt{2}} r\cos(\theta)\Big)\tfrac{1}{\sqrt{2}} r\cos(\theta) r\sin(\theta)\tfrac{1}{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\pi}\Big(\sin(\theta)^2\cos(\theta) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\cos(\theta)^2\Big)\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big/_0^{\pi}\ \Big(\tfrac{1}{3}\sin(\theta)^3 + \tfrac{1}{3\sqrt{2}}\cos(\theta)^3\Big)\Big/_0^1 \frac{1}{5} r^5 = \frac{\sqrt{3}}{30\sqrt{2}}(-1-1) = -\frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

---

**7.** Hae kartion $z^2 = x^2 + y^2$ sylinterin $x^2 + y^2 = 2ay$ sisäpuolelle jäävän osan pinta-ala käyttämällä napakoordinaatteja $x = r\cos(\theta)$ ja $y = r\sin(\theta)$ (jolloin epäyhtälö $x^2 + y^2 \le 2ay$ on $r \le 2a\sin(\theta)$.)

*Ratkaisu:* Symmetrian nojalla voidaan tarkastella sitä osaa pinnasta jolla $z \ge 0$ ja kertoa näin saatavaa tulosta kahdella. Jos $x = r\cos(\theta)$ ja $y = r\sin(\theta)$ niin kartion yhtälö on $z^2 = r^2$ eli $z = r$ jos oletetaan, että $z \ge 0$. Näin ollen pinnan parametriesitykseksi voidaan valita

$$\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k},$$

jolloin $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\mathbf{i} + r\cos(\theta)\mathbf{j}$. Silloin

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = -r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin(\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k},$$

joten

$$\mathrm{d}S = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = r\sqrt{2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Koska $x^2 + y^2 \le 2ay$ eli $r \le 2a\sin(\theta)$ niin $0 \le \theta \le \pi$ ja $0 \le r \le 2a\sin(\theta)$. Pinta-ala on siis

$$\begin{aligned}
\iint_A \mathrm{d}S &= 2\int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin(\theta)} r\sqrt{2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\Big/_0^{2a\sin(\theta)} r^2\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\sqrt{2}a^2\int_0^{\pi}\sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = 4\sqrt{2}a^2\int_0^{\pi}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\theta)\right)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \Big/_0^{\pi}\left(\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\sin(2\theta)\right) = 2\sqrt{2}\pi a^2.
\end{aligned}$$

Jos napakoordinaatteja ei käytetä ja taas rajoitutaan tapaukseen $z \geq 0$ niin todetaan, että $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Parametreiksi voidaan silloin valita $x$ ja $y$ eli

$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2+y^2}\mathbf{k}.$$

Silloin

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{r} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x}^2+y^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{r} = \mathbf{j} + \frac{y}{\sqrt{x}^2+y^2}.$$

Tästä saadaan $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{r} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Näin ollen pinta-alaksi tulee

$$2\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leq 2ay} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{2}\pi a^2,$$

koska joukko $\{\,(x,y) \mid x^2+y^2 = 2ay\,\}$ on $a$-säteinen ympyrä.

---

**8.** Laske pintaintegraali

$$\iint_P \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S,$$

(eli vektorin $\mathbf{F}$ vuo pinnan $P$ läpi), missä $P$ on pinta $y = z^2 + x$, $-1 < x < 1$, $1 < z < 2$ ja $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i} - z\mathbf{j}$ ja $\mathbf{n}$ on yksikkönormaali ylöspäin.

*Ratkaisu:* Pinnan parametriesitykseksi voidaan valita $\mathbf{r}(x,z) = x\mathbf{i} + (z^2+x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ jolloin $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = 2z\mathbf{j} + \mathbf{k}$ joten

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

Koska $\mathbf{n}$ on yksikkönormaali ylöspäin, (eli sen $\mathbf{k}$-komponentti on positiivinen) ja $1 < z < 2$ pinnalla, niin

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2z\mathbf{k})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

ja

$$\begin{aligned}\iint_P \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S &= \int_1^2\int_{-1}^1 (\mathbf{i} - z\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2z\mathbf{k})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ &= \int_1^2\int_{-1}^1 (1+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_1^2 \Big/_{-1}^{1} x(1+z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_1^2 2(1+z)\,\mathrm{d}z = \Big/_1^2 (2z+z^2) = 4+4-2-1 = 5.\end{aligned}$$

---

**9.** Laske $\iint_A \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ kun $A$ on pinta $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$ ja $\mathbf{f}(x,y,z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, eli laske funktion $\mathbf{f}$ vuo pinnan läpi. ($\mathbf{n}$ on normaali ylöspäin.)

*Vihje: Jos* $x^2+y^2+z^2=a^2$ *niin pallokoordinaateilla* $\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \pm a^2\sin(\phi)\Big(\cos(\theta)\sin(\phi)\mathbf{i} + \sin(\theta)\sin(\phi)\mathbf{j} + \cos(\phi)\mathbf{k}\Big)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$.

*Ratkaisu:* Valitaan pinnan koordinaattiesitykseksi "pallokoordinaattiesitys"

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = 2\cos(\theta)\sin(\phi)\mathbf{i} + 2\sin(\theta)\sin(\phi)\mathbf{j} + 2\cos(\phi)\mathbf{k},$$

missä $0 \le \theta \le 2\pi$ ja $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ koska $z \ge 0$. (Luku $2$ tulee siitä, että pallon säde on $2$.)

Nyt

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = 4\sin(\phi)\Big(\cos(\theta)\sin(\phi)\mathbf{i} + \sin(\theta)\sin(\phi)\mathbf{j} + \cos(\phi)\mathbf{k}\Big)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

missä merkki on valittu siten, että normaali osoittaa ylöspäin, eli positiivisen $z$-akselin suuntaan. Silloin

$$\begin{aligned}
\iint_A \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} 4\sin(\phi)\Big(\cos(\theta)\sin(\phi)\mathbf{i}+\sin(\theta)\sin(\phi)\mathbf{j}+\cos(\phi)\mathbf{k}\Big)\cdot(\mathbf{i}+2\mathbf{k})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} 4\sin(\phi)\Big(\cos(\theta)\sin(\phi) + 2\cos(\phi)\Big)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big/_0^{2\pi}\Big(4\sin(\phi)^2\sin(\theta) + 8\sin(\phi)\cos(\phi)\theta\Big)\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\pi\sin(\phi)\cos(\phi)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \Big/_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi\sin(\phi)^2 = 8\pi.
\end{aligned}$$

---

## Pyörähdyspinnat

**10.** Käyrä $y = f(x)$, $a \le x \le b$ pyörähtää $x$-akselin ympäri. Määritä syntyvän pyörähdyspinnan pinta-ala.

*Ratkaisu:* Pinnan parametriesitykseksi voidaan valita

$$\mathbf{r}(x,\theta) = x\mathbf{i} + f(x)\cos(\theta)\mathbf{j} + f(x)\sin(\theta)\mathbf{k}.$$

Silloin

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{r}\times\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x)\cos(\theta) & f'(x)\sin(\theta) \\ 0 & -f(x)\sin(\theta) & f(x)\cos(\theta)\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f'(x)\cos(\theta) & f'(x)\sin(\theta) \\ -f(x)\sin(\theta) & f(x)\cos(\theta)\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & f'(x)\sin(\theta) \\ 0 & f(x)\cos(\theta)\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & f'(x)\cos(\theta) \\ 0 & -f(x)\sin(\theta)\end{vmatrix}\mathbf{k} \\
&= f(x)f'(x)(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)\mathbf{i} - f(x)\cos(\theta)\mathbf{j} - f(x)\sin(\theta)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Tämän nojalla

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{r}\times\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{r}\right| = |f(x)|\sqrt{f'(x)^2 + \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} = |f(x)|\sqrt{f'(x)^2+1}.$$

Pinta-alaksi tulee nyt

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} |f(x)| \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, \mathrm{d}x.$$

---

**11.** Käyrä $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, pyörähtää $y$-akselin ympäri. Määritä syntyvän pyörähdyspinnan pinta-ala.

*Ratkaisu:* Valitaan parametreiksi $t$ ja $\theta$ jolloin pinnan paramteriesitykseksi tulee

$$\mathbf{r}(t,\theta) = x(t)\cos(\theta)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + x(t)\sin(\theta)\mathbf{k}.$$

Silloin

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'(t)\cos(\theta) & y'(t) & x'(t)\sin(\theta) \\ -x(t)\sin(\theta) & 0 & x(t)\cos(\theta) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y'(t) & x'(t)\sin(\theta) \\ 0 & x(t)\cos(\theta) \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x'(t)\cos(\theta) & x'(t)\sin(\theta) \\ -x(t)\sin(\theta) & x(t)\cos(\theta) \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x'(t)\cos(\theta) & y'(t) \\ -x(t)\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
&= y'(t)x(t)\cos(\theta)\mathbf{i} - x'(t)x(t)(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)\mathbf{j} + y'(t)x(t)\sin(\theta)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{r}\right| = |x(t)|\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2},$$

ja pinta-alaksi tulee

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} 1 \cdot \left|\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{r}\right| \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}t = 2\pi \int_a^b |x(t)|\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

---