

Tasointegraalit ym.

1. Laske integraali $\iint_{\Omega} x^2 dA$, missä Ω on x -akselin, suorien $y = x$ ja $x = 8$ sekä käyrän $y = \frac{16}{x}$ rajoittama alue.

Ratkaisu: Ensiksi todetaan, että $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq \min\{x, \frac{16}{x}\}\}$. Selvästikin $0 \leq x \leq \frac{16}{x}$ täsmälleen silloin kun $0 \leq x \leq 4$. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^2 dA &= \int_0^8 \int_0^{\min\{x, \frac{16}{x}\}} x^2 dy dx = \int_0^4 \int_0^x x^2 dy dx + \int_4^8 \int_0^{\frac{16}{x}} x^2 dy dx \\ &= \int_0^4 \int_0^x x^2 y dy dx + \int_4^8 \int_0^{\frac{16}{x}} x^2 y dy dx = \int_0^4 x^3 dx + \int_4^8 16x dx \\ &= \int_0^4 \frac{1}{4} x^4 + \int_4^8 8x^2 = \frac{1}{4} 4^4 + 8 \cdot 8^2 - 8 \cdot 4^2 = 448. \end{aligned}$$

2. Määritä luvut A ja B , siten, että

$$A \leq \iint_{\Omega} \frac{1}{1+x+y^2} dA \leq B,$$

missä $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$, käyttämällä hyväksi epäyhtälöitä

$$\frac{1}{2+y^2} \leq \frac{1}{1+x+y^2} \leq \frac{1}{1+y^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Muista myös, että $\frac{d}{dt} \arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Ratkaisu: Epäyhtälöstä $\frac{1}{2+y^2} \leq \frac{1}{1+x+y^2}$ saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x+y^2} dx \right) dy &\geq \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{2+y^2} dx \right) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{2+y^2} \left(\int_0^1 dx \right) dy \\ &\stackrel{y=\sqrt{2}s}{=} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2+2s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+s^2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \arctan(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Epäyhtälöstä $\frac{1}{1+x+y^2} \leq \frac{1}{1+y^2}$ seuraa taas, että

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x+y^2} dx \right) dy &\leq \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dx \right) dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \left(\int_0^1 dx \right) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \int_0^{\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Voidaan siis valita $A = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ja $B = \frac{\pi}{2}$.

Integroimisjärjestyksen vaihto

3. Oleta, että kun $n \geq 1$ niin g_n on jatkuva funktio siten, että $\int_0^1 g_n(t) dt = 1$ ja $g_n(t) = 0$ jos $t \geq \frac{1}{n}$ tai $t \leq \frac{1}{n+1}$. Olkoon

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)(g_n(y) - g_{n+1}(y)), \quad x, y \in [0, 1].$$

(Huomaa, että jokaisella x summalausekkeessa on korkeintaan yksi nollasta poikkeava termi ja funktio: $y \mapsto f(x, y)$ on jatkuva ja jokaisella $y \in [0, 1]$ summalausekkeessa on korkeintaan kaksi nollasta poikkeavaa termiä ja funktio: $x \mapsto f(x, y)$ on jatkuva.) Laske $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ ja $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$.

Ratkaisu: Olkoon $y \in [0, 1]$. Silloin

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)(g_n(y) - g_{n+1}(y)) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(y) - g_{n+1}(y)) \int_0^1 g_n(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(y) - g_{n+1}(y)) = g_1(y) - g_2(y) + g_2(y) - g_3(y) + \dots = g_1(y). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 g_1(y) dy = 1.$$

Samalla tavalla todetaan, että jos $x \in [0, 1]$ niin

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)(g_n(y) - g_{n+1}(y)) dy &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \int_0^1 (g_n(y) - g_{n+1}(y)) dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)(1 - 1) = 0, \end{aligned}$$

josta tietenkin seuraa, että

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

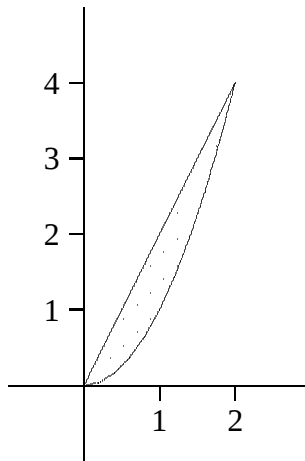
Tässä saatiin siis eri tulos riippuen integroimisjärjestyksestä ja on tietenkin helppoa todeta, että esim. $\int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dy dx = +\infty$.

4. Laske integraali $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx dy$ vaihtamalla integroimisjärjestystä.

Ratkaisu: Jos $\frac{y}{2} \leq x$ niin $y \leq 2x$ ja jos $x \leq \sqrt{y}$ niin $y \geq x^2$. Lisäksi jos $\frac{y}{2} \leq \sqrt{y}$ missä $0 \leq y \leq 4$, niin $0 \leq x \leq 2$. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx dy &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} e^{\frac{y}{x}} dy dx = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} x e^{\frac{y}{x}} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(x e^{\frac{2x}{x}} - x e^{\frac{x^2}{x}} \right) dx = \int_0^2 (x e^2 - x e^x) dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 e^2 - \left(\int_0^2 x e^x - \int_0^2 e^x dx \right) \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 e^2 - x e^x + e^x \right) = e^2 - 1. \end{aligned}$$

Integroimisalue näyttää suurin piirtein seuraavanlaiselta:



5. Vaihda integroimisjärjestys integraalissa

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^2 (x+y) dy dx,$$

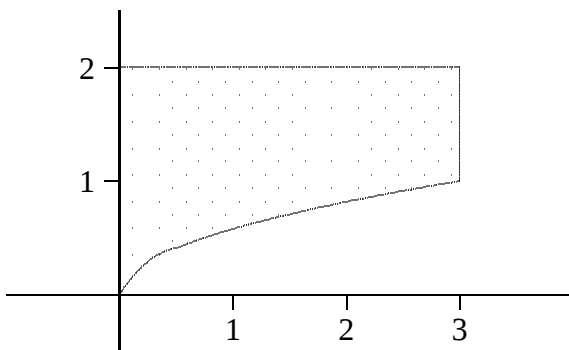
ja laske integraalin arvo. (Tässä esimerkissä integraali voidaan helposti laskea suoraankin.)

Ratkaisu: Integroimisalueessa pätee $0 \leq x \leq 3$ ja $\sqrt{\frac{x}{3}} \leq y \leq 2$. Tästä päätellään, että $0 \leq y \leq 2$ ja $\frac{x}{3} \leq y^2$ joten $0 \leq x \leq 3y^2$. Mutta koska lisäksi $x \leq 3$ niin saadaan x :lle rajat $0 \leq x \leq 3y^2$

kun $0 \leq y \leq 1$ ja $0 \leq x \leq 3$ kun $1 \leq y \leq 2$. Näin ollen todetaan, että

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^2 (x+y) \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^{3y^2} (x+y) \, dx \, dy + \int_1^2 \int_0^3 (x+y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{3y^2} \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right) \, dy + \int_1^2 \int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right) \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{9}{2}y^4 + 3y^3\right) \, dy + \int_1^2 \left(\frac{9}{2} + 3y\right) \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{9}{10}y^5 + \frac{3}{4}y^4\right) + \int_1^2 \left(\frac{9}{2}y + \frac{3}{2}y^2\right) = \frac{9}{10} + \frac{3}{4} + 9 + 6 - \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{213}{20}. \end{aligned}$$

Integroimisalue näyttää seuraavanlaiselta:



Integroismuuttujan vaihto

6. Olkoon A suunnikas, jonka kulmapisteet ovat $(0, 0)$, (a, b) , (c, d) ja $(a + c, b + d)$. Määritä joukko B siten, että $(s, t) \in B$ täsmälleen silloin kun $(x, y) \in A$ missä $x = as + ct$ ja $y = bs + dt$. Mikä on A :n pinta-ala ja mikä on B :n pinta-ala ja mitä voidaan tästä päätellä muuttujien vaihdosta?

Ratkaisu: Jos $x = as + ct$ ja $y = bs + dt$ niin

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = s(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) + t(c\mathbf{i} + d\mathbf{j}),$$

eli kyse on suunnikkaan sivuvektoreiden $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ja $c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ lineaarikombinaatio. Nyt saadaan suunnikkaan kaikki pisteet täsmälleen silloin kun s ja $t \in [0, 1]$ joten päätellään, että $B = [0, 1] \times [0, 1]$. Suunnikkaan A pinta-ala on $|(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \times (c\mathbf{i} + d\mathbf{j})| = |ad - bc|$ ja neliön B pinta-ala on tietenkin 1. Koska nyt

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

niin todetaan, että

$$\iint_A dx \, dy = \iint_B \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right| ds \, dt.$$

7. Laske kappaleen $D = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \quad y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ tilavuus, eli joukko, jonka rajoittavat $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ pyörähtää x -akselin ympäri ja on laskettava syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.

Ratkaisu: Otetaan käyttöön ”sylinteri”-koordinaatit (r, θ, x) missä $y = r \cos(\theta)$ ja $z = r \sin(\theta)$. Silloin $dy \, dz = r \, dr \, d\theta$ ja joukkoa D vastaa uusissa koordinaateissa joukkoa $\{(r, \theta, x) \mid a \leq x \leq b, \quad 0 \leq r \leq |f(x)|, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Silloin

$$\begin{aligned} V(D) &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{|f(x)|} r \, dr \, d\theta \, dx \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{1}{2} r^2 \right) d\theta \, dx = \int_a^b \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, d\theta \, dx = \pi \int_a^b |f(x)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

8. Olkoon $0 \leq a < b$. Laske kappaleen $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq f(\sqrt{x^2 + z^2}), \quad a^2 \leq x^2 + z^2 \leq b^2\}$ tilavuus, eli käyrän $y = f(x)$, ja suorien $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ rajoittama alue pyörähtää y -akselin ympäri ja on laskettava syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.

Ratkaisu: Tässä tapauksessa otetaan käyttöön ”sylinteri”-koordinaatit (r, θ, y) missä $x = r \cos(\theta)$ ja $z = r \sin(\theta)$. Silloin $dx \, dz = r \, dr \, d\theta$ ja joukosta D tulee uusissa koordinaateissa joukko $\{(r, \theta, y) \mid 0 \leq y \leq f(r), \quad a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Nyt

$$\begin{aligned} V(D) &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(r)} r \, dy \, d\theta \, dr = \int_a^b \int_0^{2\pi} r f(r) \, d\theta \, dr \\ &= \int_a^b 2\pi r f(r) \, dr = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx. \end{aligned}$$

9. Laske integraali $\iint_{\Omega} x^2 y^2 \, dx \, dy$, missä Ω on käyrien $xy = 1$, $xy = 2$, $x = y$ ja $x = 4y$ rajoittama alue ensimmäisessä neljänneksessä, tekemällä muuttujanvaihtoa $x = uv$ ja $y = u/v$.

Ratkaisu: Jos $x = uv$ ja $y = u/v$ niin $xy = u^2$ ja $\frac{x}{y} = v^2$. Näin ollen Ω :n kuva kuvauksessa $(x, y) \mapsto (u, v)$ on $\{(u, v) \mid 1 \leq u \leq \sqrt{2}, \quad 1 \leq v \leq 2\}$. Nyt

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -v \frac{u}{v^2} - u \frac{1}{v} = -2 \frac{u}{v},$$

joten

$$dx \, dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv = 2 \frac{u}{v} du \, dv.$$

Lisäksi $x^2 y^2 = (uv)^2 \left(\frac{u}{v}\right)^2 = u^4$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^2 y^2 \, dx \, dy &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_1^2 u^4 \frac{2u}{v} \, dv \, du \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_1^2 2u^5 \ln(v) \, dv \right) du = \int_1^{\sqrt{2}} 2u^5 (\ln(2) - \ln(1)) \, du \\ &= 2 \ln(2) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{6} u^6 = \frac{2 \ln(2)}{6} (2^3 - 1) = \frac{7}{3} \ln(2). \end{aligned}$$

10. Hae pallon $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ja sylinterin $x^2 + y^2 = b^2$ sisäpuolelle jäävän kappaleen tilavuus käyttäen sylinterikoordinaatteja kun $b < a$

Ratkaisu: Otetaan käyttöön sylinterikoordinaatit $[r, \theta, z]$ jolloin $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ ja $dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz$. Kyseinen kappale on $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq b^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\} = \{[r, \theta, z] \mid 0 \leq r \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi, z^2 \leq a^2 - r^2\}$. Näin ollen tilavuus on

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} 1 \, r \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^b r(\sqrt{a^2-r^2} - (-\sqrt{a^2-r^2})) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^b 2r\sqrt{a^2-r^2} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^b \left(-\frac{2}{3}\right) (a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \left((a^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}\right) \, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

11. Olkoon K kolmio, jonka kärkipisteet ovat $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Määrittele pisteet $\hat{\mathbf{x}}_j$ kaavalla

$$\hat{\mathbf{x}}_j = \sum_{k=1}^3 \frac{3\delta_{j,k} + 1}{6} \mathbf{x}_k,$$

missä $\delta_{j,k} = 1$ jos $j = k$ ja 0 jos $j \neq k$. Tarkista

$$\text{pinta-ala}(K) \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 f(\hat{\mathbf{x}}_j),$$

antaa integraalin $\iint_K f \, dA$ kun f on korkeintaan astetta 2 oleva polynomi.

Ratkaisu: Kirjoitetaan koordinaattivektorit pystyvektoreina, jotta matriisilla kertominen menee helpommin. Olkoon M matriisi $\begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) \\ (y_2 - y_1) & (y_3 - y_1) \end{pmatrix}$. Silloin kuvaus $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x} + \mathbf{x}_1$ kuvaa kolmion K_1 , jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ kolmiolle K ja jos f on korkeintaan

astetta 2 oleva polynomi niin myös $g(\mathbf{x}) = f(M\mathbf{x} + \mathbf{x}_1)$ on sellainen polynomi. Muuttujan vaihdolla saadaan

$$\iint_{K_1} g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{|\det(M)|} \int_K f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Lisäksi todetaan, että

$$\begin{aligned} g\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) &= f(\hat{\mathbf{x}}_1), \\ g\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) &= f(\hat{\mathbf{x}}_2), \\ g\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix}\right) &= f(\hat{\mathbf{x}}_3). \end{aligned}$$

Koska kolmion K pinta-ala on $\frac{1}{2}|\det(M)|$ nähdään, että

$$\text{pinta-ala}(K) \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 f(\hat{\mathbf{x}}_j) = \frac{|\det(M)|}{6} \left(g\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) + g\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix}\right) \right).$$

Tästä nähdään, että riittää tarkistaa, että väite pätee (ja että myös muut samanlaiset väitteet pätevät) kolmiolla K_1 ja tässä tapauksessa riittää lineaarisuden nojalla tarkistaa, että väite pätee funktioilla $1, x, y, xy, x^2$ ja y^2 . Kun näin tehdään todetaan, että

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{6}(1 + 1 + 1) = \iint_{K_1} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{6} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}\right) = \iint_{K_1} x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{6} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}\right) = \iint_{K_1} y \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{24} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6}\right) = \iint_{K_1} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{24}, \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \iint_{K_1} x^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{12}, \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}\right) = \iint_{K_1} y^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa toinen mahdollisuus olisi ollut valita $\hat{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$, $\hat{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3)$ ja $\hat{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, eli $\hat{\mathbf{x}}_j = \sum_{k=1}^3 \frac{1-\delta_{j,k}}{2} \mathbf{x}_k$.
