

Lagrangen kertojat

1. Hae lyhin etäisyys origosta johonkin pinnan $xyz^2 = 2$ pisteeseen, käyttäen Lagrangen kertojaa.

Ratkaisu: On helpompaa tarkastella etäisyyden neliötä joten haetaan funktion $x^2 + y^2 + z^2$ pienin arvo kun $xyz^2 - 2 = 0$. Muodostetaan Lagrangen funktio

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xyz^2 - 2),$$

ja määritetään tämän funktion gradientin nollakohdat:

$$L_x(x, y, z, \lambda) = 2x + \lambda yz^2 = 0,$$

$$L_y(x, y, z, \lambda) = 2y + \lambda xz^2 = 0,$$

$$L_z(x, y, z, \lambda) = 2z + 2\lambda xy z = 0,$$

$$L_\lambda(x, y, z, \lambda) = xyz^2 - 2 = 0.$$

Jos $x = 0$ tai $y = 0$ tai $z = 0$ niin viimeinen yhtälö ei toteudu, joten voimme olettaa, että $x \neq 0$, $y \neq 0$ ja $z \neq 0$, (jolloin funktion $xyz^2 - 2$ gradientti ei ole 0). Kolmannesta yhtälöstä saadaan $\lambda = -\frac{1}{xy}$ joten kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $2x^2 = z^2$ ja $2y^2 = z^2$. Koska $z^2 > 0$ niin yhtälöstä $xyz^2 = 2$ seuraa, että x ja y ovat samanmerkkiset, joten $x = y$ ja $z = \pm\sqrt{2}x$. Silloin ehdosta $xyz^2 = 2$ seuraa, että $x^4 = 1$, eli $x = \pm 1$. Mahdolliset ääriarvopisteet ovat siis $(1, 1, \pm\sqrt{2})$ ja $(-1, -1, \pm\sqrt{2})$ ja koska näiden pisteiden etäisyydet origosta ovat kaikki 2 niin todetaan, että se on lyhin etäisyys.

2. Määritä lyhin etäisyys pisteestä $(0, -1)$ johonkin käyrän $y = \sqrt{1 - x^2}$ pisteeseen Lagrangen kertojaa käyttäen.

Ratkaisu: Nyt on siis laskettava funktion $f(x, y) = x^2 + (y + 1)^2$ pienin arvo kun $y - \sqrt{1 - x^2} = 0$. Muodostetaan Lagrangen funktio $L(x, y, \lambda) = x^2 + (y + 1)^2 + \lambda(y - \sqrt{1 - x^2})$ ja lasketaan tämän funktion gradientin nollakohdat:

$$L_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

$$L_y(x, y, \lambda) = 2(y + 1) + \lambda = 0,$$

$$L_\lambda(x, y, \lambda) = y - \sqrt{1 - x^2} = 0.$$

Jos $x = 0$ niin saadaan $y = 1$ kolmannesta yhtälöstä ja toinenkin yhtälö toteutuu kun $\lambda = -4$. Jos $x \neq 0$ niin $\lambda = -2\sqrt{1 - x^2}$ jolloin toisesta yhtälöstä seuraa, että

$$2y + 2 = 2\sqrt{1 - x^2},$$

joten kolmannen yhtälön nojalla

$$\sqrt{1 - x^2} + 1 = \sqrt{1 - x^2},$$

mikä on ristiriita. Näin ollen ainoa ratkaisu on $x = 0$ ja $y = 1$. Mutta jos piirretään kuvio nähdään helposti, että tämä antaa funktiolle suurimman arvon kun taas pienin arvo saavutetaan

kun $x = \pm 1$ ja $y = 0$. Tässä tapauksessa siis Lagrangen kertoimista ei ollut hyötyä koska haettu ääriarvo saavutetaan käyrän päätepisteessä.

3. Määritä funktion $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$ pienin arvo kun $x + y + z = 4$ ja $4x + 4y + 3z = 15$.

Ratkaisu: Muodostetaan Lagrangen funktio

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + 2y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 4) + \mu(4x + 4y + 3z - 15).$$

Ehdosta $L'(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ saadaan yhtälösystemi

$$\begin{aligned} 2x + \lambda + 4\mu &= 0 \\ 4y + \lambda + 4\mu &= 0 \\ 2z + \lambda + 3\mu &= 0 \\ x + y + z - 4 &= 0 \\ 4x + 4y + 3z - 15 &= 0. \end{aligned}$$

Ratkaisemalla x , y ja z kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä ja sijoittamalla tulokset kahteen viimeiseen saadaan

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\lambda - 2\mu - \frac{1}{4}\lambda - \mu - \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}\mu &= 4 \\ -2\lambda - 8\mu - \lambda - 4\mu - \frac{3}{2}\lambda - \frac{9}{2}\mu &= 15. \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} -5\lambda - 18\mu &= 16 \\ -9\lambda - 33\mu &= 30 \end{aligned}$$

Tästä saadaan ratkaisuksi $\lambda = 4$ ja $\mu = -2$. Näin ollen $x = 2$, $y = 1$ ja $z = 1$ ja $f(2, 1, 1) = 4 + 2 + 1 = 7$. Koska $f(x, y, z) \rightarrow \infty$ kun $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ niin päätellään, että nimenomaan pienin arvo saavutetaan pisteessä $(2, 1, 1)$.

4. Oletetaan, että kun ratkaistaan optimointitehtävää $\max f(x, y, z)$ kun $g(x, y, z) = t$ (tai vastaava minimointitehtävää) Lagrangen kertojaa käyttäen niin löytyy ratkaisu $(x(t), y(t), z(t))$, joka on t :n derivoituva funktio. Miten Lagrangen kertoja liittyy muuttujaan t ?

Ratkaisu: Muodostetaan Lagrangen funktio

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda(g(x, y, z) - t).$$

Oletetaan, että f :n suurin arvo saavutetaan pisteessä $(x(t), y(t), z(t))$ ja merkitään $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ ja $H(t) = f(\mathbf{x}(t))$. Nyt ehto, että L :n derivaatta on 0 voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}(t)) + \lambda g'(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{0}, \\ g(\mathbf{x}(t)) - t &= 0. \end{aligned}$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä seuraa, että

$$g'(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}'(t) = 1,$$

ja silloin saadaan edellisen yhtälön nojalla

$$H'(t) = f'(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}'(t) = -\lambda g'(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}'(t) = -\lambda,$$

eli Lagrangen kertoja λ kertoo millä nopeudella suurin (tai pienin) arvo pienenee kun rajoitusehto $e = g(x)$ muuttuu.

5. Oleta, että f ja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia, $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ ja $f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$ kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ joilla $g(x, y, z) = 0$ ja että $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Osoita, että on olemassa luku λ_0 siten, että $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ on funktion $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ kriittinen piste (eli $L'(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$).

Ratkaisu: Koska $g'(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ niin ainakin yksi komponentti on nollasta poikkeava ja oletetaan, että esimerkiksi $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Silloin löytyy implisiittifunktiolauseen avulla funktio $h(x, y)$ siten, että $h(x_0, y_0) = z_0$ ja $g(x, y, h(x, y)) = 0$ kun $|(x, y) - (x_0, y_0)|$ on riittävän pieni. Mutta silloin $f(x, y, h(x, y)) \geq f(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ ja funktion $(x, y) \mapsto f(x, y, h(x, y))$ derivaatta on 0 pisteessä (x_0, y_0) eli

$$\begin{aligned}f_x(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) + f_z(x_0, y_0, h(x_0, y_0))h_x(x_0, y_0) &= 0, \\f_y(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) + f_z(x_0, y_0, h(x_0, y_0))h_y(x_0, y_0) &= 0.\end{aligned}$$

Implisiittifunktiolauseesta seuraa, että

$$\begin{aligned}g_x(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) + g_z(x_0, y_0, h(x_0, y_0))h_x(x_0, y_0) &= 0, \\g_y(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) + g_z(x_0, y_0, h(x_0, y_0))h_y(x_0, y_0) &= 0.\end{aligned}$$

joten kun $h_x(x_0, y_0)$ ja $h_y(x_0, y_0)$ ratkaistaan näistä yhtälöistä ja sijoitetaan edellä oleviin niin saadaan (kun muistetaan, että $z_0 = h(x_0, y_0)$) että

$$\begin{aligned}f_x(x_0, y_0, z_0) - \frac{f_z(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)}g_x(x_0, y_0, z_0) &= 0, \\f_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{f_z(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)}g_y(x_0, y_0, z_0) &= 0.\end{aligned}$$

Jos nyt määritellään $\lambda = -\frac{f_z(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)}$ niin pätee $L'(x_0, y_0, z_0, \lambda) = \mathbf{0}$.

6. Etsi funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$, suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{ (x, y) \mid 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 1 \},$$

Lagrangen kertojan avulla.

Ratkaisu: Mudostetaan ensin Lagrangen funktio

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(3x^2 + 2xy + 2y^2 - 1).$$

Lasketaan tämän funktion kriittiset pisteet ja saadaan

$$\begin{aligned}L_x(x, y, \lambda) &= 1 + \lambda(6x + 2y) = 0, \\L_y(x, y, \lambda) &= 1 + \lambda(2x + 4y) = 0, \\L_\lambda(x, y, \lambda) &= 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Kun x ja y ratkaistaan kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$x = -\frac{1}{10\lambda} \quad \text{ja} \quad y = -\frac{1}{5\lambda}.$$

Kun nämä arvot sijoitetaan yhtälöön $3x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ saadaan

$$\lambda^2 = \frac{3}{100} + \frac{2}{50} + \frac{2}{25} = \frac{3}{20}.$$

Näin ollen $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{20}}$ ja mahdolliset ääriarvopisteet ovat $(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}})$ ja $(-\frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}})$.

Nyt joukko A on rajoitettu, mikä voidaan joko nähdä siitä, että $3x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ on ellipsin yhtälö tai siitä, että $3x^2 + 2xy + 2y^2 = 2x^2 + (x+y)^2 + y^2$ josta huomataan että $|x| \leq 1$ ja $|y| \leq 1$ kun $(x, y) \in A$. Koska A on lisäksi suljettu, eli sisältää reunansa (tässä tapauksessa A ei sisällä muita pisteitäkään) niin jatkuva funktio f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa ja koska

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}\right) = \sqrt{\frac{3}{5}},$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{5}},$$

niin todetaan, että suurin arvo on $\sqrt{\frac{3}{5}}$ ja pienin $-\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Regressio

7. Eräässä maassa 44 prosentilla kaikista kotitalouksista oli digiboksi helmikussa 2006. Vastaavat prosenttiluvut olivat saman vuoden elokuussa ja marraskussa 51% ja 56%. Arvioi tämän perusteella kuinka suurella osuudella kotitalouksista oli digiboksi tammikuussa 2007 ja tulee olemaan elokuussa 2007 käyttäen lineaarista regressiota. (Samojen tutkimusten perusteella prosenttiosuus tammikuussa 2007 oli 61%.)

Ratkaisu: Numeroidaan kuukaudet vuoden 2005 alusta jolloin $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ ja $x_3 = 11$ ja vastaavat luvut y_i ovat olemaan $y_1 = 22$, $y_2 = 25$ ja $y_3 = 29$.

Haetaan luvut a ja b siten, että $f(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2$ on mahdollisimman pieni. Yhtälöt $f_a = 0$ ja $f_b = 0$ muodostavat yhtälösystemin

$$\left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^3 x_i\right)b = \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i\right),$$
$$\left(\sum_{i=1}^3 x_i\right)a + 3b = \left(\sum_{i=1}^3 y_i\right),$$

eli

$$189a + 21b = 1112,$$

$$21a + 3b = 151,$$

josta seuraa, että

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1112 & 21 \\ 151 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 189 & 21 \\ 21 & 3 \end{vmatrix}} = 1.31 \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 189 & 1112 \\ 21 & 151 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 189 & 21 \\ 21 & 3 \end{vmatrix}} = 41.17$$

Jos ensin vähennetään keskiarvo x -muuttujasta on laskettava keskiarvo ja se on

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 x_j = 7.$$

Sitten lasketaan $x_j - \bar{x}$ ja saadaan

$$x_1 - \bar{x} = -5,$$

$$x_2 - \bar{x} = 1,$$

$$x_3 - \bar{x} = 4.$$

Seuraavaksi on laskettava

$$\sum_{j=1}^3 (x_j - \bar{x})y_j = 55,$$

ja

$$\sum_{j=1}^3 (x_j - \bar{x})^2 = 42.$$

Nyt saadaan suoraan (koska $\sum_{j=1}^3 (x_j - \bar{x}) = 0$)

$$a = \frac{\sum_{j=1}^3 (x_j - \bar{x})y_j}{\sum_{j=1}^3 (x_j - \bar{x})^2} = \frac{55}{42} = 1.31,$$

ja

$$b = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 y_j - a\bar{x} = \frac{151}{3} - 1.31 \cdot 7 = 41.17.$$

Tammikuussa 2007 prosenttiosuus on silloin $13a + b \approx 58$ ja elokuussa 2007 vastaavasti $20a + b \approx 67$.

8. Pisteet $(1, 1)$, $(2, 4)$ ja $(4, 5)$ on annettu. Määritä suorat $y = ax + b$ siten, että $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 |ax_i + b - y_i|^2$ on mahdollisimman pieni, ja suora $x = cy + d$ siten, että $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 |cy_i + d - x_i|^2$ on mahdollisimman pieni. Onko tuloksena sama suora, eli pätee $a = \frac{1}{c}$ ja $b = -\frac{d}{c}$?

Ratkaisu: Haetaan luvut a ja b siten, että $f(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 |ax_i + b - y_i|^2$ on mahdollisimman pieni. Yhtälöt $f_a = 0$ ja $f_b = 0$ muodostavat yhtälösystemin

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right) b &= \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i \right), \\ \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right) a + 3b &= \left(\sum_{i=1}^3 y_i \right), \end{aligned}$$

eli

$$21a + 7b = 29,$$

$$7a + 3b = 10,$$

josta seuraa, että

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 29 & 7 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}} = 1.2143 \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 21 & 29 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}} = 0.5$$

Haetaan luvut c ja d siten, että $g(c, d) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 |cy_i + d - x_i|^2$ on mahdollisimman pieni. Yhtälöt $g_c = 0$ ja $g_d = 0$ muodostavat yhtälösystemin

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 \right) c + \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right) d &= \left(\sum_{i=1}^3 y_i x_i \right), \\ \left(\sum_{i=1}^3 y_i \right) c + 3d &= \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right), \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} 42c + 10d &= 29, \\ 10c + 3d &= 7, \end{aligned}$$

josta seuraa, että

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 29 & 10 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 42 & 10 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}} = 0.65385 \quad d = \frac{\begin{vmatrix} 42 & 29 \\ 10 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 42 & 10 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}} = 0.15385$$

Koska $\frac{1}{c} = 1.5294$ ja $-\frac{d}{c} = -0.2353$ niin nähdään että suorat ovat erilaiset.

9. Oletetaan, että pisteet (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ on annettu. Selitä, miten löydetään vakiot p , q ja r siten, että $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |pe^{-x_i} + q + re^{x_i} - y_i|^2$ on mahdollisimman pieni.

Määritä matriisi A ja vektori $\mathbf{r}$ siten, että tehtävänä on minimoida funktiota $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |A\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$. Mikä on nyt vektori $\mathbf{x}$. Määritä $f'(\mathbf{x})$.

Ratkaisu: Jos merkitään $f(p, q, r) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |pe^{-x_i} + q + re^{x_i} - y_i|^2$ ja jos on löydettävä tämän funktion minimipiste, niin on laskettava derivaatan eli gradientin nollakohdat ja saadaan yhtälösystemi

$$\begin{aligned} f_p(p, q, r) &= \sum_{i=1}^n (pe^{-x_i} + q + re^{x_i} - y_i) e^{-x_i} = 0, \\ f_q(p, q, r) &= \sum_{i=1}^n (pe^{-x_i} + q + re^{x_i} - y_i) = 0, \\ f_r(p, q, r) &= \sum_{i=1}^n (pe^{-x_i} + q + re^{x_i} - y_i) e^{x_i} = 0. \end{aligned}$$

Tästä tulee yhtälösystemi

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n e^{-2x_i} \right) p &+ \left(\sum_{i=1}^n e^{-x_i} \right) q &+ nr &= \sum_{i=1}^n e^{-x_i} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n e^{-x_i} \right) p &+ nq &+ \left(\sum_{i=1}^n e^{-x_i} r \right) r &= \sum_{i=1}^n y_i \\ np &+ \left(\sum_{i=1}^n e^{x_i} \right) q &+ \left(\sum_{i=1}^n e^{2x_i} \right) r &= \sum_{i=1}^n e^{x_i} y_i \end{aligned}$$

Jos valitaan $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ ja $A = \begin{pmatrix} e^{-x_1} & 1 & e^{x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-x_n} & 1 & e^{x_n} \end{pmatrix}$, ja $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ niin $f(p, q, r) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2$. Koska tämä voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{1}{2}(\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A^T \mathbf{Ax} - \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T \mathbf{Ay}$ niin

$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{A} - \mathbf{y}^T \mathbf{A},$$

koska $A^T A$ on symmetrinen matriisi. Näin ollen yhtälö $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ voidaan myös esittää muodossa

$$A^T \mathbf{Ax} = A^T \mathbf{y}.$$

10. Oletetaan, että pisteet $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ on annettu. Selitä miten saadaan regressiosuora lasketuksi jos ensin vähennetään x_i -arvoista keskiarvo $\bar{x}$.

Ratkaisu: Keskiarvo on tietenkin

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Koska $ax_i + b - y_i = a(x_i - \bar{x}) + (b + a\bar{x}) - y_i$ niin nähdään, että on haettava lausekkeen

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a\tilde{x}_i + \tilde{b} - y_i)^2,$$

pienin arvo missä $\tilde{x}_i = x_i - \bar{x}$ ja $\tilde{b} = b + a\bar{x}$. Derivoimalla a :n ja $\tilde{b}$:n suhteen saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a\tilde{x}_i + \tilde{b} - y_i)\tilde{x}_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (a\tilde{x}_i + \tilde{b} - y_i) &= 0, \end{aligned}$$

ja tästä seuraa, koska määritelmän mukaan $\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i = 0$ että

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 &= \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i y_i, \\ n\tilde{b} &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned}$$

Tästä taas saadaan suoraan

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i y_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \\ b &= \tilde{b} - a\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - a\bar{x} = \bar{y} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \bar{x}, \end{aligned}$$

missä tietenkin $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

11. Olkoon B symmetrinen $d \times d$ matriisi. Määritä funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ ($\mathbf{x}$ on $d \times 1$ pystyvektori) pienin arvo suoralla $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$ missä $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Olkoon $\mathbf{x}_1$ piste missä minimi saavutetaan. Laske $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)^T$ kun $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ ja $\mathbf{u} = -f'(\mathbf{x}_0)$. Osoita, että jos $|\lambda x_0| = |y_0|$, niin $|\lambda x_1| = |y_1|$. Mitä voidaan sanoa luvuista $\left| \frac{y_1}{y_0} \right|$ tässä tapauksessa.

Ratkaisu: Olkoon $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) = (\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})^T B(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$. Silloin $g'(t) = 2\mathbf{u}^T B(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ ja kun ratkaistaan yhtälö $g'(t) = 0$ saadaan

$$t = -\frac{\mathbf{u}^T B \mathbf{x}_0}{\mathbf{u}^T B \mathbf{u}},$$

ja

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{u}^T B \mathbf{x}_0}{\mathbf{u}^T B \mathbf{u}} \mathbf{u}.$$

Jos nyt $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T$ ja $\mathbf{u} = -f'(\mathbf{x}_0) = -2B\mathbf{x}_0 = -2 \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, niin

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \frac{\lambda^2 x_0^2 + y_0^2}{\lambda^3 x_0^2 + y_0^2} \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_0^2 - \lambda y_0^2}{\lambda^3 x_0^2 + y_0^2} x_0 \\ \frac{\lambda^3 x_0^2 - \lambda^2 x_0^2}{\lambda^3 x_0^2 + y_0^2} y_0 \end{pmatrix}.$$

Jos lisäksi $|\lambda x_0| = |y_0|$ niin

$$\frac{|\lambda x_1|}{|y_1|} = \frac{|y_0^2(1-\lambda)\lambda x_0|}{|\lambda^2 x_0^2(\lambda-1)y_0|} = 1.$$

Tässä tapauksessa pätee myös

$$\left| \frac{y_1}{y_0} \right| = \frac{|\lambda^2 x_0^2(\lambda-1)|}{|\lambda \lambda^2 x_0^2 + y_0^2|} = \left| \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right|.$$

Jos joko λ on hyvin iso tai λ on hyvin pieni (mutta positiivinen), niin $\left| \frac{y_1}{y_0} \right|$ on melkein 1, josta seuraa, että tarvitaan hyvin monta askelta ennen kuin y_n tulee 0:n läheisyyteen ja $(0,0)$ on tietenkin funktion f minimikohta.

Integraalin derivointi

12. Oletetaan, että p ja f ovat jatkuvia funktioita. Laske funktion $y(x) = \int_0^x e^{-\int_t^x p(s) ds} f(t) dt$ derivaatta. Minkä differentiaaliyhtälön ratkaisu tämä funktio y on?

Ratkaisu: Integraalin derivoimissäännön nojalla pätee

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-\int_x^x p(s) ds} f(x) \cdot 1 + \int_0^x e^{-\int_t^x p(s) ds} (-p(x)) f(t) dt \\ &= f(x) - p(x) \int_0^x e^{-\int_t^x p(s) ds} f(t) dt = -p(x)y(x) + f(x). \end{aligned}$$