

Implisiittifunktiot

1. Kun z ratkaistaan yhtälöstä $xy + x^2y^2z + yz = 3$ saadaan ratkaisuksi $z(x, y)$ jolle pätee $z(1, 1) = 1$. Määritä (implisiittistä) derivaattaa käyttäen approksimatiivinen yläraja lausekkeelle $|z(x, y) - 1|$ kun tiedetään, että $|x - 1| \leq 0.02$ ja $|y - 1| \leq 0.01$.

Ratkaisu: Olkoon $f(x, y, z) = xy + x^2y^2z + yz$ joten $f(1, 1, 1) = 3$. Jos nyt myös $f(1 + \Delta x, 1 + \Delta y, 1 + \Delta z) = 3$ niin

$$0 = f(1 + \Delta x, 1 + \Delta y, 1 + \Delta z) - f(1, 1, 1) \\ \approx f_x(1, 1, 1)\Delta x + f_y(1, 1, 1)\Delta y + f_z(1, 1, 1)\Delta z.$$

Nyt $f_x(x, y, z) = y + 2xy^2z$, $f_y(x, y, z) = x + 2x^2yz + z$ ja $f_z(x, y, z) = x^2y^2 + y$ joten $f_x(1, 1, 1) = 3$, $f_y(1, 1, 1) = 4$ ja $f_z(1, 1, 1) = 2$. Yhtälöstä saadaan

$$\Delta z \approx -\frac{1}{f_z(1, 1, 1)}(f_x(1, 1, 1)\Delta x + f_y(1, 1, 1)\Delta y),$$

josta seuraa

$$|\Delta z| \lesssim \frac{1}{|f_z(1, 1, 1)|}(|f_x(1, 1, 1)||\Delta x| + |f_y(1, 1, 1)||\Delta y|) \leq \frac{1}{2}(3 \cdot 0.02 + 4 \cdot 0.01) = 0.05.$$

2. Robotin tasossa liikkuvan käsivarren toinen pää liikkuu suoralla $y = x$ ja tämän lisäksi toista päätä ohjataan säätämällä käsivarren ja vektorin $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (eli suoran suuntavektorin) välistä kulmaa φ . Jos tietyllä hetkellä käsivarren vapaa pää on pisteessä $(5, 1)$ jolloin $\varphi = -135^\circ$ ja tämän pää nopeus(vektori) on $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ niin millä nopeudella käsivarren toinen pää liikkuu?

Ratkaisu: Jos käsivarren toinen pää on pisteessä $(5, 1)$ ja sen ja suoran $y = x$ välinen kulma on $-\frac{3\pi}{4}$ niin toinen pää on pisteessä $(5, 5)$ ja käsivarren pituus on 4. Näin ollen todetaan, että jos suoralla $y = x$ oleva pää on pisteessä (t, t) ja kulma on φ niin toisen pää koordinaatit ovat $x = 4\cos(\varphi + \frac{\pi}{4}) + t$ ja $y = 4\sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) + t$. Merkitään $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jolloin nämä yhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4\cos(\varphi + \frac{\pi}{4}) + t - x \\ 4\sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) + t - y \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Olkoot $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Jos nyt $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ on kääntyvä matriisi niin implisiittifunktiolauseen nojalla $\mathbf{u}$ voidaan ratkaista muuttujan $\mathbf{v}$ funktiona, ainakin kun $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|$ on riittävän pieni. (Tässä tapauksessa tämä on asia, joka näkyy suoraankin.) Jos nyt $\mathbf{v}$ on ajan s funktio, eli $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ niin myös $\mathbf{u}$ tulee olemaan s :n funktio ja saadaan yhtälö

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s)) = 0,$$

josta derivoimalla saadaan

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s))\mathbf{u}'(s) + \mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s))\mathbf{v}'(s) = 0.$$

Jos nyt $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ ja $\mathbf{v}'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ kuten oletettiin, niin $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ ja

$$\mathbf{u}'(0) = -\mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)^{-1} \mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Yksinkertainen lasku osoittaa, että

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \\ 1 & 4 \cos(\varphi + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

jolloin

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(0) &= - \begin{pmatrix} 1 & -4 \sin(-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) \\ 1 & 4 \cos(-\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Näin ollen $t'(0) = -1$ eli käsivarren toisen pään nopeus on $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

3. Karttapaperi on kutistunut niin, että koordinaattiakselien suuntaisen suorakulmion pinta-ala on pienentynyt 2 % ja sen lävistäjän pituus on pienentynyt 1 %. Arvioi (laskemalla derivaatat implisiittisesti) paljonko paperi on kutistunut x -akselin suunnassa ja paljonko y -akselin suunnassa kun suorakulmion x -akselin suuntainen sivu on kaksi kertaa niin pitkä kuin y -akselin suuntainen sivu.

Ratkaisu: Olkoon suorakulmion sivut x ja y (tietenkin niin, että x -akselin suuntaisen sivun pituus on x). Jos pinta-ala on a ja lävistäjä b niin pätee tietenkin

$$\begin{aligned} a &= xy, \\ b &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Jos merkitään $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, niin nämä yhtälöt voidaan tietenkin kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} xy - a \\ \sqrt{x^2 + y^2} - b \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jos meillä on ratkaisu $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{u}$, niin haluamme selvittää millä arvoilla ΔBx ja Δu myös $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$ ja $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$ toteuttavat yhtälön. Näin ollen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Lineaaraisella approksimaatiolla saadaan silloin

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \Delta \mathbf{u},$$

ja jos oletetaan, että $\Delta \mathbf{u}$ on tunnettu niin saadaan

$$\Delta \mathbf{x} \approx -\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{u})^{-1} \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \Delta \mathbf{u}.$$

(Implisiittifunktiolause takaa, että riittävän pienillä $\Delta \mathbf{u}$ löytyy $\Delta \mathbf{x}$ olettaen, että oletukset ovat voimassa.)

Yksinkertaisella laskulla todetaan, että

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

jolloin erikoisesti

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})^{-1} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y^2-x^2} \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & -x \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \end{pmatrix}.$$

Jos nyt kirjoitetaan $\Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix}$ ja $\Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ niin saadaan

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})^{-1} \Delta \mathbf{u} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y^2-x^2} \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & -x \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{y^2-x^2} \Delta a - \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y^2-x^2} \Delta b \\ -\frac{x}{y^2-x^2} \Delta a + \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{y^2-x^2} \Delta b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $\Delta a = -0,02a = -0,02xy$ ja $\Delta b = -0,01b = -0,01\sqrt{x^2+y^2}$ jolloin

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{x} &\approx \frac{1}{y^2-x^2} (-0,02 \cdot y^2 + 0,01 \cdot (x^2+y^2)), \\ \frac{\Delta y}{y} &\approx \frac{1}{y^2-x^2} (0,02x^2 - 0,01 \cdot (x^2+y^2)). \end{aligned}$$

Koska oletettiin, että $y = \frac{1}{2}x$ niin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{x} &\approx \frac{0,02}{3} - \frac{0,01 \cdot 5}{3} = -0,01, \\ \frac{\Delta y}{y} &\approx -\frac{0,02 \cdot 4}{3} + \frac{0,01 \cdot 5}{3} = -0,01. \end{aligned}$$

4. Oletetaan, että muuttujat x, y, z ja u toteuttavat yhtälösystemin

$$\begin{aligned} x - z + 2u &= 3, \\ x + y + 2z + u &= 2. \end{aligned}$$

Laske $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ ja $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u$.

Ratkaisu: Vähentämällä jälkimmäinen yhtälö kerrottuna kahdella ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$-x - 2y - 5z = -1, \quad \text{eli} \quad x = -2y - 5z + 1.$$

Tässä x on muuttujien y ja z funktiona jolloin

$$\frac{\partial x(y, z)}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -2.$$

Vastaavasti, kertomalla ensimmäistä yhtälöä kahdella ja laskemalla yhteen saadaan

$$3x + y + 5u = 8, \quad \text{eli} \quad x = -\frac{1}{3}y - \frac{5}{3}u + \frac{8}{3}.$$

Tässä x on muuttujien y ja u funktiona jolloin

$$\frac{\partial x(y, u)}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_u = -\frac{1}{3}.$$

5. Köysi on kiinnitetty pisteisiin $(0, 0)$ ja (a, b) ja köyden keskipisteeseen on kiinnitetty kappale, jonka paino on paljon suurempi kuin köyden paino. Jos köyden pituus on $2L$ ja kappaleen koordinaatit ovat (x, y) niin

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= L^2, \\ (a - x)^2 + (b - y)^2 &= L^2. \end{aligned}$$

Jos $L = 5$, $a = 7$ ja $b = -1$ niin $x = 3$ ja $y = -4$. Arvioi, implisiittistä derivointia käyttäen, mihin pisteeseen kappale siirtyy jos toinen kiinnityspiste siirretään pisteestä $(7, -1)$ pisteeseen $(6.9, -0.8)$.

Ratkaisu: Merkitään $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ja

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - L^2 \\ (a - x)^2 + (b - y)^2 - L^2 \end{pmatrix},$$

jolloin pätee $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Jos nyt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ ja $\Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ on löydettävä $\Delta \mathbf{x}$ siten, että $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Linearisella approksimaatiolla saadaan

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\Delta \mathbf{x} + \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\Delta \mathbf{u},$$

eli $\Delta \mathbf{x}$ on yhtälösystemin

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{u})\Delta \mathbf{x} \approx -\mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{u})\Delta \mathbf{u},$$

ratkaisu. Tässä tapauksessa

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2(a - x) & -2(b - y) \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(a - x) & 2(b - y) \end{pmatrix}.$$

Sijoittamalla arvot saadaan

$$\mathbf{f}_{\mathbf{x}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -8 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{f}_{\mathbf{u}}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yhtälösystemiksi tulee näin ollen

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisuksi tulee silloin, kun yhtälösystemiä ratkaistaan esim. laskemalla käänteismatriisia (mikä ainakin suurempien yhtälösystemien kohdalla on huono idea)

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx -\frac{1}{-36 - 64} \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 3.2 \\ 2.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.032 \\ 0.024 \end{pmatrix}$$

Näin ollen kappale sijaitsee suunnilleen pisteessä $(3.03, -3.98)$.

Ääriarvot

6. Hae funktion $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y}$ paikalliset ääriarvot.

Ratkaisu: Lasketaan funktion derivaatan eli gradientin nollakohdat ja saadaan

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 4x - \frac{2}{x^3y} = 0, \\f_y(x, y) &= 2y - \frac{1}{x^2y^2} = 0,\end{aligned}$$

josta seuraa, että

$$2x^4y = 1 \quad \text{ja} \quad 2x^2y^3 = 1,$$

joten $y = \frac{1}{2x^4}$, $\frac{2x^2}{8x^{12}} = 1$ josta saadaan $x = \pm \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ ja $y = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

Lasketaan funktion f toinen derivaatta jolloin saadaan

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4 + \frac{6}{x^4y}) & \frac{2}{x^3y^2} \\ \frac{2}{x^3y^2} & 2 + \frac{2}{x^2y^3} \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad f''\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right) = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Molemmissa tapauksissa matriisin determinantti on $96 - 16 = 80 > 0$ ja koska lävistäjäelementit ovat positiiviset niin molemmat ominaisarvot ovat positiiviset ja kyseessä on minimipiste.

7. Määritä funktion f , $f(x, y) = x^2 + xy - \frac{1}{4}y^2$, suurin ja pienin arvo joukossa

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 4 \}.$$

Kun tarkastellaan joukon A reunaa $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 4 \}$ kannattaa esimerkiksi sijoittaa $x = \cos(t)$, $y = 2 \sin(t)$ jolloin $t \in [0, 2\pi]$.

Ratkaisu: Lasketaan ensin funktion kriittiset pisteet, eli derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 2x + y = 0, \\f_y(x, y) &= x - \frac{1}{2}y = 0,\end{aligned}$$

josta saadaan $x = y = 0$. Tässä tehtävässä ei ole tarpeen selvittää onko tämä paikallinen maksimi- vai minimikohta, mutta helposti voidaan osoittaa, että se onkin satulapiste.

Tämän jälkeen haetaan mahdolliset ääriarvopisteet reunalla ja sijoitetaan vihjeen mukaisesti $x = \cos(t)$ ja $y = 2 \sin(t)$ jolloin siis saadaan kaikki reunapisteet kun $t \in [0, 2\pi]$. Merkitään

$$g(t) = f(\cos(t), 2 \sin(t)) = \cos(t)^2 + 2 \cos(t) \sin(t) - \sin(t)^2 = \cos(2t) + \sin(2t).$$

Määritetään g :n derivaatan nollakohdat ja saadaan

$$g'(t) = -2 \sin(2t) + 2 \cos(2t) = 0,$$

josta seuraa, että $\tan(2t) = 1$ joten $2t = \frac{\pi}{4}$ tai $2t = \frac{5\pi}{4}$ ja $t = \frac{\pi}{8}$ tai $t = \frac{5\pi}{8}$. (Koska myös $2t = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ ja $2t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi$ niin saadaan myös $t = \frac{\pi}{8} + \pi$ ja $t = \frac{5\pi}{8} + \pi$ mutta funktion arvot ovat kuitenkin silloin samat.) Näissä pisteissä g :n ja siten f :n arvot ovat $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ja $-\sqrt{2}$. (Koska g on jaksollinen ei tarvitse tarkistaa arvot välin $[0, 2\pi]$ päätepisteissä.) Koska $f(0, 0) = 0$ niin päätellään, että suurin arvo on $\sqrt{2}$ ja pienin $-\sqrt{2}$.

8. Hae funktion $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ suurin ja pienin arvo kolmiossa, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(1, 2)$.

Ratkaisu: Lasketaan ensin funktion kriittiset pisteet eli gradientin nollakohdat:

$$f_x(x, y) = y(1 - x - y) - xy = 0,$$

$$f_y(x, y) = x(1 - x - y) - xy = 0.$$

Jos $y = 0$ niin ensimmäinen yhtälö on voimassa ja toisesta seuraa, että $x(1 - x) = 0$ eli $x = 0$ tai $x = 1$. Vastaavasti, jos $x = 0$ niin $y = 0$ tai $y = 1$. Jos $x \neq 0$ ja $y \neq 0$ niin saadaan yhtälösystemi

$$1 - x - y - x = 0,$$

$$1 - x - y - y = 0,$$

josta saadaan ratkaisuksi Cramerin säännöllä

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}.$$

Kriittiset pisteet ovat siis $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 0)$ ja näistä ainoastaan $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ on joukon $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$ sisäpiste, pisteet $(0, 0)$ ja $(0, 1)$ ovat sen reunalla ja $(1, 0)$ sen ulkopuolella.

Haetaan seuraavaksi ne reunapisteet, joissa mahdollisesti saavutetaan suurin tai pienin arvo. Tarkastellaan ensin janaa pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(1, 0)$ jolla $y = 0$ ja $0 \leq x \leq 1$. Tällä janalla funktion arvot ovat identtisesti 0 joten suurin ja pienin arvo saavutetaan esim. pisteessä $(0, 0)$. Janalla pisteestä $(1, 0)$ pisteeseen $(1, 2)$ pätee $x = 1$ ja $0 \leq y \leq 2$ joten on tarkasteltava funktiota $g(y) = f(1, y) = y(-y) = -y^2$. Tämän funktion suurin arvo saavutetaan kun $y = 0$ ja pienin kun $y = 2$, joten mahdolliset (globaalit) ääriarvopisteet ovat $(1, 0)$ ja $(1, 2)$.

Tarkastellaan lopuksi janaa pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(1, 2)$ jolla $1 \leq x \leq 1$ ja $y = 2x$. On siis tarkasteltava funktiota

$$h(x) = f(x, 2x) = 2x^2(1 - x - 2x) = 2x^2 - 6x^3.$$

Tämän funktion derivaatan nollakohdat saadaan yhtälöstä $h'(x) = 4x - 18x^2 = 0$ josta seuraa, että $x = 0$ tai $x = \frac{2}{9}$. Suurin ja pienin arvo tällä janalla saavutetaan siis pisteessä $(0, 0)$, $(\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$ tai pisteessä $(1, 2)$. Seuraavaksi lasketaan funktion arvot näin saaduissa pisteissä:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{27}, \\ f(0, 0) &= 0, \\ f(1, 0) &= 0, \\ f(1, 2) &= -4, \\ f\left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right) &= \frac{8}{243}. \end{aligned}$$

Tästä voidaan päätellä, että suurin arvo $\frac{1}{27}$ saavutetaan pisteessä $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ja pienin -4 pisteessä $(1, 2)$.

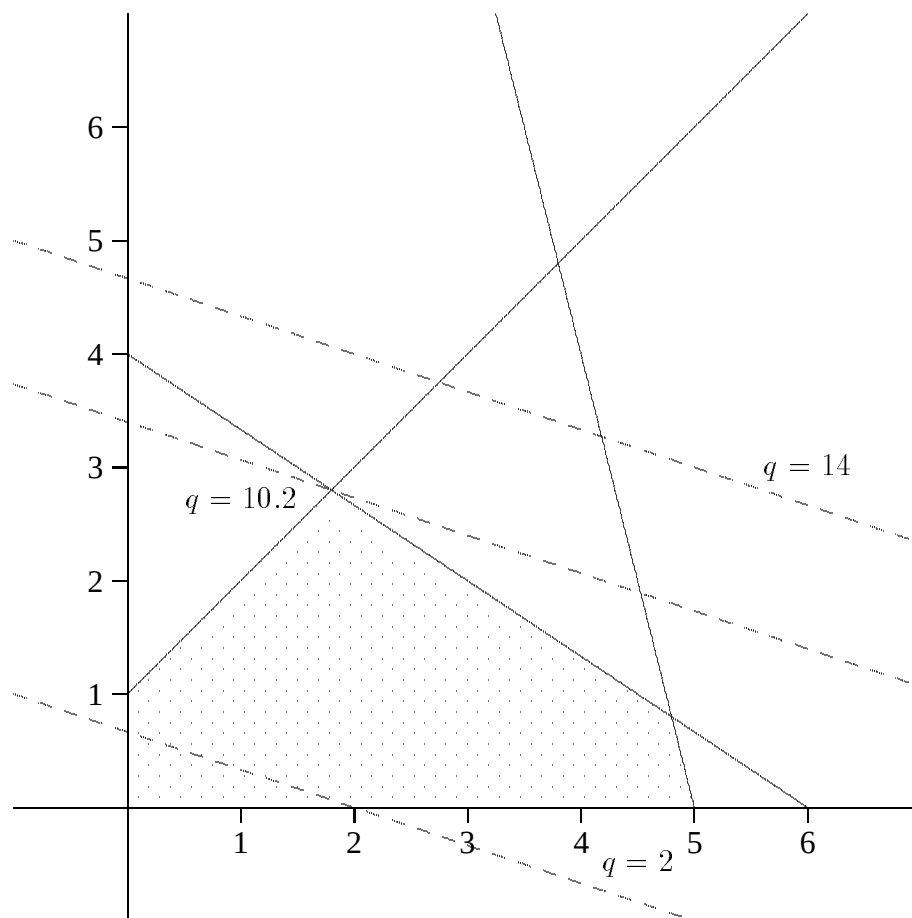
Lineaarinen optimointi

9. Ratkaise graafisesti seuraava lineaarinen optimointiprobleema:

$$\max\{q = x_1 + 3x_2 \mid x_1, x_2 \geq 0, -x_1 + x_2 \leq 1, 2x_1 + 3x_2 \leq 12, 4x_1 + x_2 \leq 20\}.$$

(Eli piirrä joukko, jonka pisteet toteuttavat rajoitusehdot, piirrä suora $x_1 + x_2 = c$ eri c :n arvoilla ja valitse sitten c mahdollisimman suureksi niin, että suoralta $2x_1 + 3x_2 = c$ löytyy piste, joka toteuttaa rajoitusehdot.)

Ratkaisu:



Suurin arvo saavutetaan siis suorien $-x_1 + x_2 = 1$ ja $2x_1 + 3x_2 = 12$ leikkauspisteessä, joka on $(\frac{9}{5}, \frac{14}{5})$.
