

Tangenttitaso

1. Paraboloidin muotoisen peilin pinnan yhtälö on $z = ax^2 + ay^2$. Pisteeseen (x_0, y_0, z_0) , missä $z_0 = ax_0^2 + ay_0^2$, tulee vektorin $-\mathbf{k}$ suuntainen valonsäde. Käyttäen kaavaa $\mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$, laske minkä z -akselin pisteen läpi heijastunut valonsäde kulkee.

Ratkaisu: Lasketaan ensin pinnan normaali ja kirjoitetaan yhtälö muotoon $f(x, y, z) = -ax^2 - ay^2 + z$. Normaali on silloin funktion f gradientti eli $\mathbf{n} = f'(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k} = -2ax_0\mathbf{i} - 2ay_0\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Heijastuneen valonsäteen suunta laskeaan siis kaavasta

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$$

missä $\mathbf{u}$ on sisääntulevan valonsäteen suunta, $\mathbf{v}$ on heijastuneen säteen suunta ja $\mathbf{n}$ on normaalin suunta. Tässä tapauksessa saadaan

$$\mathbf{v} = -\mathbf{k} - 2\frac{-1}{4a^2x_0^2 + 4a^2y_0^2 + 1}(-2ax_0\mathbf{i} - 2ay_0\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Heijastuneen valonsäteen yhtälö on $x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t\mathbf{v}$. Tämä suora leikkaa yz -tasoa pisteessä, missä i -komponentti on 0 eli tässä tapauksessa kun

$$t = \frac{x_0}{\frac{4ax_0}{4a^2x_0^2 + 4a^2y_0^2 + 1}} = \frac{4a^2x_0^2 + 4a^2y_0^2 + 1}{4a},$$

ja vastaavasti se leikkaa xz -tasoa pisteessä, missä j -komponentti on 0 eli kun

$$t = \frac{y_0}{\frac{4ay_0}{4a^2x_0^2 + 4a^2y_0^2 + 1}} = \frac{4a^2x_0^2 + 4a^2y_0^2 + 1}{4a}.$$

Koska molemmissa tapauksissa saatiin sama arvo t :lle, niin suora kulkee z -akselin läpi. Tämän pisteen z -koordinaatti on näin ollen

$$\begin{aligned} ax_0^2 + ay_0^2 + \frac{4a^2x_0^2 + 4a^2y_0^2 + 1}{4a} \left(-1 + \frac{2}{4a^2x_0^2 + 4a^2y_0^2 + 1} \right) \\ = ax_0^2 + ay_0^2 - ax_0^2 - ay_0^2 - \frac{1}{4a} + \frac{2}{4a} = \frac{1}{4a}. \end{aligned}$$

Lineaarinen approksimointi

2. Laske approksimaatio luvulle

$$\sqrt{\frac{5.01 - 3.97}{5.01 + 3.97}}$$

käyttäen derivaattaa.

Ratkaisu: Ensimmäinen approksimaatio, käyttämättä derivaattoja on

$$\sqrt{\frac{5.01 - 3.97}{5.01 + 3.97}} \approx \sqrt{\frac{5 - 4}{5 + 4}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Jos tätä approksimaatiota haluaa parantaa, kirjoitetaan

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}},$$

jolloin $f(5, 4) = \frac{1}{3}$ ja on laskettava $f(5 + 0.01, 4 - 0.03)$. Lineaarisella approksimaatiolla saadaan

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y.$$

Tässä tapauksessa

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}} \left(\frac{1}{x+y} - \frac{x-y}{(x+y)^2} \right),$$
$$f_y(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}} \left(-\frac{1}{x+y} - \frac{x-y}{(x+y)^2} \right),$$

joten

$$f_x(5, 4) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{5-4}{5+4}}} \left(\frac{1}{5+4} - \frac{5-4}{(5+4)^2} \right) = \frac{4}{27},$$
$$f_y(5, 4) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{5-4}{5+4}}} \left(-\frac{1}{5+4} - \frac{5-4}{(5+4)^2} \right) = -\frac{5}{27},$$

Koska nyt $\Delta x = 0.01$ ja $\Delta y = -0.03$ saadaan

$$\begin{aligned} f(5.01, 3.97) &= f(5 + 0.01, 4 + (-0.03)) \approx f(5, 4) + f_x(5, 4) \cdot 0.01 + f_y(5, 4) \cdot (-0.03) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \cdot 0.01 - \frac{5}{27} \cdot (-0.03) = \frac{1}{3} + \frac{19}{27 \cdot 100} \approx 0.34037 \approx 0.34, \end{aligned}$$

kun tarkka arvo on noin 0.34031297

3. Kolme vastusta kytketään rinnakkain, jolloin niiden yhteinen vastus R on $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Mittaamalla on todettu, että $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 8\Omega$ ja $R_3 = 12\Omega$ ja mittaustarkkuus on 0.5%. Arvioi derivaatan avulla mikä on R :n suhteellinen virhe näillä mitatuilla arvoilla laskettuna.

Ratkaisu: Merkitään $f(x, y, z) = (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})^{-1}$ jolloin siis $R = f(R_1, R_2, R_3)$. Ketjusäännön nojalla

$$f_x(x, y, z) = \frac{1}{x^2} f(x, y, z)^2, \quad f_y(x, y, z) = \frac{1}{y^2} f(x, y, z)^2, \quad f_z(x, y, z) = \frac{1}{z^2} f(x, y, z)^2.$$

Lineaarisella approksimoinnilla nähdään, että

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \approx f_x(x, y, z)\Delta x + f_y(x, y, z)\Delta y + f_z(x, y, z)\Delta z.$$

Tästä saadaan yläraja R :n suhteelliselle virheelle:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta R}{R} \right| &= \left| \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{f(x, y, z)} \right| \\ &\leq \left| \frac{f_x(x, y, z)}{f(x, y, z)} \Delta x \right| + \left| \frac{f_y(x, y, z)}{f(x, y, z)} \Delta y \right| + \left| \frac{f_z(x, y, z)}{f(x, y, z)} \Delta z \right|. \end{aligned}$$

Jos tähän sijoitetaan f_x :n, f_y :n ja f_z :n lausekkeet niin saadaan

$$\left| \frac{\Delta R}{R} \right| \leq R \left(\frac{1}{R_1} \frac{|\Delta R_1|}{R_1} + \frac{1}{R_2} \frac{|\Delta R_2|}{R_2} + \frac{1}{R_3} \frac{|\Delta R_3|}{R_3} \right).$$

Koska suhteelliset virheet $\left| \frac{\Delta R_j}{R_j} \right| \leq \frac{0.5}{100}$ ja koska $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$, niin nähdään, että

$$\left| \frac{\Delta R}{R} \right| \leq 0.005.$$

Suhteellinen virhe on siis korkeintaan suunnilleen 0.5 %.

4. Halutaan laskea g kaavasta $g = \frac{L4\pi^2}{T^2}$. Oletetaan, että π tunnetaan 2 desimaalin tarkkuudella ja että virhe T :n arvossa on korkeintaan 0,1%. Arvioi derivaatan avulla miten tarkasti L on mittattava, jotta g :n suhteellinen virhe olisi korkeintaan 0,5%.

Ratkaisu: Merkitään

$$f(x, y, z) = \frac{4xy^2}{z^2},$$

jolloin siis $g = f(L, \pi, T)$. Nyt

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= \frac{4y^2}{z^2}, \\ f_y(x, y, z) &= \frac{8xy}{z^2}, \\ f_z(x, y, z) &= -\frac{8xy^2}{z^3}. \end{aligned}$$

Lineaarisella approksimaatiolla saadaan

$$\begin{aligned} f(L + \Delta L, \pi + \Delta \pi, T + \Delta T) - f(L, \pi, T) \\ \approx f_x(L, \pi, T) \Delta L + f_y(L, \pi, T) \Delta \pi + f_z(L, \pi, T) \Delta T, \end{aligned}$$

jolloin siis

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta g}{g} \right| &= \left| \frac{f(L + \Delta L, \pi + \Delta \pi, T + \Delta T) - f(L, \pi, T)}{f(L, \pi, T)} \right| \\ &\approx \left| \frac{L f_x(L, \pi, T)}{f(L, \pi, T)} \right| \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\pi f_y(L, \pi, T)}{f(L, \pi, T)} \right| \left| \frac{\Delta \pi}{\pi} \right| + \left| \frac{T f_z(L, \pi, T)}{f(L, \pi, T)} \right| \left| \frac{\Delta T}{T} \right| \\ &= \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + 2 \left| \frac{\Delta \pi}{\pi} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right| \end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $|\frac{\Delta T}{T}| \leq 0.001$ ja $|\frac{\Delta \pi}{\pi}| \leq \frac{0.005}{3.14} \approx 0.0016$. Jos nyt halutaan, että $|\frac{\Delta g}{g}| \leq 0.005$ niin ilmeisesti riittää että

$$\left| \frac{\Delta L}{L} \right| + 2 \cdot 0.0016 + 2 \cdot 0.001 \leq 0.005$$

mutta silloin $|\frac{\Delta L}{L}| \leq -0.0002$ eli tämä ei onnistu. Jos sen sijaan vaatimus olisi, että g :n suhteellinen virhe olisi korkeintaan 0,6% niin saataisiin

$$\left| \frac{\Delta L}{L} \right| + 2 \cdot 0.0016 + 2 \cdot 0.001 \leq 0.006$$

joka on yhtäpitävä ehdon $|\frac{\Delta L}{L}| \leq 0.0008$ kanssa, eli tässä tapauksessa riittää (suunnilleen), että L :n suhteellinen virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 0.08%.

5. Erään kemiallisen prosessin säätöön käytettiin kaksi parametriä x ja y ja sivutuotteena saatiin tietty haittallinen aine. Kun x suurennettiin ja y vähennettiin saman verran niin sivutuotteen määrä pieneni 2 %, mutta kun ainoastaan x vähennettiin (yhtä paljon kun se suurennettiin edellisessä kokeessa) niin sivutuotteen määrä kasvoi 3 %. Miten parametrit x ja y olisi muutettava jotta sivutuotteen määrä saataisiin pienenemään mahdollisimman paljon?

Ratkaisu: Olkoon sivutuotteen määrä prosessissa $f(x, y)$. Olkoon h parametrien arvoissa tehtyjen muutosten itseisarvo. Oletusten mukaan

$$\begin{aligned} f(x+h, y-h) - f(x, y) &= -\frac{2}{100}f(x, y), \\ f(x-h, y) - f(x, y) &= \frac{3}{100}f(x, y). \end{aligned}$$

Koska $f(x+h, y-h) - f(x, y) \approx f_x(x, y)h - f_y(x, y)h$ ja $f(x-h, y) - f(x, y) \approx -f_x(x, y)h$ niin saadaan yhtälösystemi

$$\begin{aligned} f_x(x, y) - f_y(x, y) &\approx -2a, \\ -f_x(x, y) &\approx 3a, \end{aligned}$$

missä siis $a = \frac{f(x, y)}{100h} > 0$. Tästä saadaan helposti $f_x(x, y) \approx -3a$ ja $f_y(x, y) \approx -a$. Funktion gradientti on siis $\approx -3a\mathbf{i} - a\mathbf{j}$. Jos halutaan pienentää f :n arvoja on siis siirryttävä gradientin vastakkaiseen suuntaan, eli suuntaan $3a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$, eli parametriä x on suurennettava kolme kertaa niin paljon kuin parametriä y .

Newtonin menetelmä

6. Miten Newtonin menetelmällä voidaan likimääräisesti ratkaista yhtälösystemi $x^3y - xy^2 = -2$, $x + y + xy = 5$. Laske yksi iteraatioaskel alkuarvolla $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Ratkaisu: Jos merkitään

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^3y - xy^2 + 2 \\ x + y + xy - 5 \end{pmatrix},$$

niin on löydettävä yhtälön $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ratkaisu. Newtonin menetelmän mukaisesti lasketaan

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

kun $n = 0, 1, 2, \dots$ ja $\mathbf{x}_0$ on annettu. Tässä tapauksessa

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2y - y^2 & x^3 - 2xy \\ 1 + y & 1 + x \end{pmatrix}$$

joten jos $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ niin lasketaan

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ja } \mathbf{f}'\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

ja saadaan

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Jos jatketaan saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1.179026217 \\ 1.575280899 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_3 &= \begin{pmatrix} 0.9824035938 \\ 1.985901884 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_4 &= \begin{pmatrix} 1.000278149 \\ 1.99970619 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_5 &= \begin{pmatrix} 1.000000052 \\ 1.999999881 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. Esitä miten Newtonin menetelmällä voidaan approksimatiivisesti ratkaista yhtälösystemi

$$x^2y + x + y = 2,$$

$$x + y^2 = 3,$$

ja laske vähintään yksi kierros alkuarvoilla $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Ratkaisu: Merkitään

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2y + x + y - 2 \\ x + y^2 - 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

jolloin

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + 1 & x^2 + 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}.$$

Nyt on laskettava

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

ja saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jos jatketaan saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} 0.33333 \\ 1.66667 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_3 &= \begin{pmatrix} 0.22222 \\ 1.66667 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_4 &= \begin{pmatrix} 0.24772 \\ 1.659 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_5 &= \begin{pmatrix} 0.24047 \\ 1.6612 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_6 &= \begin{pmatrix} 0.24244 \\ 1.6606 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_7 &= \begin{pmatrix} 0.2419 \\ 1.6608 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_8 &= \begin{pmatrix} 0.24204 \\ 1.6607 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_9 &= \begin{pmatrix} 0.242 \\ 1.6607 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Tarkastellaan yhtälösystemiä $x^2 + y^2 = 2$, $xy = 1$. Tarkista, että $x = 1$, $y = 1$ ja $x = -1$, $y = -1$ ovat ratkaisuja. Mitä vaikeuksia saattaa syntyä jos yhtälösystemiin ratkaisuun käytetään Newtonin menetelmää?

Ratkaisu: Jos merkitään $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ ja $f_2 = xy - 1$ niin $f_1(1, 1) = f_1(-1, -1) = 0$ ja $f_2(1, 1) = f_2(-1, -1) = 0$ joten $x = 1$, $y = 1$ ja $x = -1$, $y = -1$ ovat ratkaisuja. Jos

$$\mathbf{f} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ xy - 1 \end{pmatrix},$$

niin

$$\mathbf{f}' \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix},$$

ja tämän matriisin determinantti on $2x^2 - 2y^2$ josta seuraa, että se on 0 kun $x = \pm y$. Tästä seuraa, että $\mathbf{f}'$ ei ole kääntävä kun $x = \pm y$. Tästä syystä menetelmä ei toimi lainkaan jos alkupiste on valittu huonosti, tai jos se toimii se todennäköisesti suppeenee hitaasti.

Esimerkiksi jos valitaan $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja lasketaan

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

niin saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 1.3333 \\ 0.83333 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1.1282 \\ 0.87821 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_3 &= \begin{pmatrix} 1.0625 \\ 0.93751 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_4 &= \begin{pmatrix} 1.0313 \\ 0.96875 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_5 &= \begin{pmatrix} 1.0156 \\ 0.98437 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_6 &= \begin{pmatrix} 1.0078 \\ 0.99219 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_7 &= \begin{pmatrix} 1.0039 \\ 0.99609 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_8 &= \begin{pmatrix} 1.002 \\ 0.99805 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_9 &= \begin{pmatrix} 1.001 \\ 0.99902 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_{10} &= \begin{pmatrix} 1.0005 \\ 0.99951 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
