

Osittaisderivaatat ja -yhtälöt

1. Tarkista, että funktio $h(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ on osittaisdifferentiaaliyhtälön $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ ratkaisu kun $t > 0$ ja $x \in \mathbb{R}$. Voidaanko h määritellä kun $t = 0$ siten, että h on jatkuva joukossa

- (a) $\{ (t, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \},$
 (b) $\{ (t, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, t + |\mathbf{x}| > 0 \},$

Ratkaisu: Funktio on jatkuva kun $t > 0$ ja $x \in \mathbb{R}$ koska funktiot $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}, (t, x) \mapsto -\frac{x^2}{4t}$ ovat silloin jatkuvia samoin kuin eksponenttifunktio. Kun $x \neq 0$ niin

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = 0,$$

koska $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} e^{-\beta r} = 0$ jos $\beta > 0$ ja voidaan ottaa $r = \frac{1}{t}$ ja $\beta = \frac{x^2}{4}$. Tästä voidaan myös päätellä, että jos $x_0 \neq 0$ niin

$$\lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (0,x_0) \\ t > 0}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = 0,$$

(esim. niin, että todetaan, että kun (t, x) on riittävän lähellä $(0, x_0)$ niin $0 \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x_0^2}{4t}} \rightarrow 0$ kun $t \downarrow 0$). Näin ollen saadaan jatkuva funktio joukossa $\{ (t, x) \mid x \in \mathbb{R}, t \geq 0, t + |x| > 0 \}$ kun määritellään $h(0, x) = 0$. Mutta joukkoon $\{ (t, x) \mid x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \}$ ei ole mahdollista saada jatkuvaa funktiota koska $\lim_{x \rightarrow 0} h(0, x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ mutta $\lim_{t \downarrow 0} h(t, 0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} = +\infty$.

Derivaatta

2. Olkoon B $d \times d$ -matriisi. Määritä funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$) derivaatta eli gradientti. Mikä on vastaus jos B on symmetrinen? Voit joko käyttää derivaatan määritelmää, ja käyttää matriisimerkintöjä, tai sitten esittää $f(\mathbf{x})$ summana, missä esiintyy $\mathbf{x}$:n komponentit x_j ja B :n elementit $B(i, j) = b_{i,j}$ ja laskea osittaisderivaatat.

Ratkaisu: Koska $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \approx f'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ voidaan ehkä saada jonkinlainen käsitys siitä, miltä $f'(\mathbf{x})$ näyttää laskemalla ensin

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} + \mathbf{h})^T B (\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{x}^T B \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T B \mathbf{x} + \mathbf{h}^T B \mathbf{x} + \mathbf{x}^T B \mathbf{h} + \mathbf{h}^T B \mathbf{h} - \mathbf{x}^T B \mathbf{x} = \mathbf{x}^T B^T \mathbf{h} + \mathbf{x}^T B \mathbf{h} + \mathbf{h}^T B \mathbf{h} \\ &= \mathbf{x}^T (B^T + B) \mathbf{h} + \mathbf{h}^T B \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Tämän perusteella arvataan, että $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (B + B^T)$ ja se tarkistetaan laskemalla

$$\frac{|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^T (B + B^T) \mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = \frac{|\mathbf{h}^T B \mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \rightarrow 0,$$

kun $h \rightarrow 0$ eli $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$ koska $|\mathbf{h}^T B \mathbf{h}| \leq C |\mathbf{h}|^2$ missä C on tietty B :stä riippuva vakio. Näin ollen on todettu, että $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(B + B^T)$. Jos B on symmetrinen niin $f'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T B$.

Toisella tavalla: Kirjoitetaan $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d x_i \sum_{j=1}^d b_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d b_{i,j} x_i x_j$. Silloin

$$D_k f = f_{x_k} = \sum_{j=1}^d b_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^d b_{i,k} x_i = \sum_{i=1}^d x_i (b_{i,k} + b_{k,i}),$$

ja tämä on sama tulos kuin edellä.

3. Osoita, että jos $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva ja $\rho > 0$ niin on olemassa vakio $C < \infty$ siten, että

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq C |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \text{kun } |x|, |y| \leq \rho.$$

Ratkaisu: Koska f on jatkuvasti derivoituva, niin $|f'|$ on jatkuva funktio ja koska $\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| \leq \rho\}$ on suljettu ja rajoitettu joukko niin löytyy luku C siten, että $|f'(\mathbf{x})| \leq C$ kun $|\mathbf{x}| \leq \rho$. Jos nyt $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat sellaisia, että $|\mathbf{x}| \leq \rho$ ja $|\mathbf{y}| \leq \rho$ niin määritellään funktio g kaavalla $g(t) = f((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y})$. Silloin g on derivoituva reaaliarvoinen funktio ja väliarvolauseen nojalla

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)(1 - 0),$$

missä $t_0 \in (0, 1)$. Ketjusäännön nojalla

$$g'(t_0) = f'((1-t_0)\mathbf{x} + t_0\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

joten

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| = |g(1) - g(0)| \leq |f'((1-t_0)\mathbf{x} + t_0\mathbf{y})| |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq C |\mathbf{y} - \mathbf{x}|,$$

koska $|(1-t_0)\mathbf{x} + t_0\mathbf{y}| \leq (1-t_0)|\mathbf{x}| + t_0|\mathbf{y}| \leq \rho$. Näin ollen väite on voimassa.

Ketjusääntö

4. Funktio v toteuttaa Laplaceen yhtälön $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Määritellään funktio u siten, että $u(r, \theta) = v(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ (eli u on v käyttäen napakoordinaatteja). Osoita laskemalla osittaisderivaatat, että u toteuttaa yhtälön

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0.$$

Mikä yhtälö saadaan jos $v(x, y)$ riippuu ainoastaan pisteen (x, y) etäisyydestä origosta.

Ratkaisu: Lasketaan osittaisderivaatat ja todetaan, että

$$\begin{aligned}u_r(r, \theta) &= v_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) + v_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin(\theta), \\u_{rr}(r, \theta) &= v_{xx}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos^2(\theta) + 2v_{xy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) \sin(\theta) \\&\quad + v_{yy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin^2(\theta), \\u_\theta(r, \theta) &= v_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta))(-r \sin(\theta)) + v_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \cos(\theta), \\u_{\theta\theta}(r, \theta) &= v_{xx}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r^2 \sin^2(\theta) \\&\quad + 2v_{xy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))(-r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)) + v_{yy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r^2 \cos^2(\theta) \\&\quad - v_x(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \cos(\theta) - v_y(r \cos(\theta), r \sin(\theta))r \sin(\theta).\end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0$, erikoisesti

$$v_{xx}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + v_{yy}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 0,$$

ja tämän tuloksen avulla nähdään, että

$$u_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r}u_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0.$$

Jos $v(x, y)$ riippuu ainoastaan pisteen (x, y) etäisyydestä origosta niin u riippuu ainoastaan muuttujasta r jolloin $u_{\theta\theta} = 0$ yhtälöksi tulee $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0$.

5. Oletetaan, että neste virtaa tasossa siten, että nopeus pisteessä (x, y) hetkellä t on $u(x, y, t)\mathbf{i} + v(x, y, t)\mathbf{j}$. Määritä hetkellä t pisteessä (x, y) sijaitsevan ”nestepartikkelin” kiihtyvyyys.

Ratkaisu: Partikkelin sijainti hetkellä t olkoon $(X(t), Y(t))$ (jolloin siis $X(t) = x$ ja $Y(t) = y$ jos se on pisteessä (x, y) hetkellä t). Silloin nopeus on $X'(t)\mathbf{i} + Y'(t)\mathbf{j}$ josta seuraa, että $X'(t) = u(X(t), Y(t), t)$ ja $Y'(t) = v(X(t), Y(t), t)$. Kiihtyvyyys taas on $X''(t)\mathbf{i} + Y''(t)\mathbf{j}$ ja ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}X''(t) &= u_x(X(t), Y(t), t)X'(t) + u_y(X(t), Y(t), t)Y'(t) + u_t(X(t), Y(t), t) \\&= u_x(X(t), Y(t), t)u(X(t), Y(t), t) + u_y(X(t), Y(t), t)v(X(t), Y(t), t) + u_t(X(t), Y(t), t) \\&= u_x(x, y, t)u(x, y, t) + u_y(x, y, t)v(x, y, t) + u_t(x, y, t).\end{aligned}$$

Samalla tavalla saadaan

$$\begin{aligned}Y''(t) &= v_x(X(t), Y(t), t)X'(t) + v_y(X(t), Y(t), t)Y'(t) + v_t(X(t), Y(t), t) \\&= v_x(X(t), Y(t), t)u(X(t), Y(t), t) + v_y(X(t), Y(t), t)v(X(t), Y(t), t) + v_t(X(t), Y(t), t) \\&= v_x(x, y, t)u(x, y, t) + v_y(x, y, t)v(x, y, t) + v_t(x, y, t).\end{aligned}$$

Näin ollen kiihtyvyyys on

$$\begin{aligned}(u_x(x, y, t)u(x, y, t) + u_y(x, y, t)v(x, y, t) + u_t(x, y, t))\mathbf{i} \\+ (v_x(x, y, t)u(x, y, t) + v_y(x, y, t)v(x, y, t) + v_t(x, y, t))\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Toisella tavalla kirjoitettuna tämä lauseke on

$$\begin{aligned} \left((u(x, y, t)\mathbf{i} + v(x, y, t)\mathbf{j}) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \right) (u(x, y, t)\mathbf{i} + v(x, y, t)\mathbf{j}) \\ = \left(\mathbf{w} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{w} \end{aligned}$$

kun $\mathbf{w} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$. Huomaa, että tämä on epälineaarinen lauseke ja tästä epälineaarisuudesta seuraa suuri osa virtausmekaniikan hankaluuksista.

Suunnattu derivaatta

6. Karttapaperi venyy a kertaa niin nopeasti y -akselin suunnassa kuin mitä se kutistuu x -akselin suunnassa. Kolmion kulmat ovat kartalla pisteissä $(0, 0)$, $(3, 1)$ ja $(2, 4)$. Millä a :n arvoilla kolmion pinta-ala kasvaa?

Ratkaisu: Oletetaan, että origo pysyy paikallaan. Jos x -akselin suuntaisen janan pituus pienenee $p\%$ niin y -akselin suuntaisen janan pituus kasvaa $ap\%$. Jos on annettu pisteet (x, y) ja (u, v) niin nämä siirtyvät silloin pisteisiin $(x - \frac{p}{100}x, y + \frac{ap}{100}y)$ ja $(u - \frac{p}{100}u, v + \frac{ap}{100}v)$ ja $\mathbb{R}^4$:n piste (x, y, u, v) siirtyy pisteeseen $(x - \frac{p}{100}x, y + \frac{ap}{100}y, u - \frac{p}{100}u, v + \frac{ap}{100}v)$ eli suuntaan $\mathbf{w} = (-x, ay, -u, av)$. Kolmion, jonka kulmat ovat origossa ja pisteissä (x, y) ja (u, v) , pinta-ala on $f(x, y, u, v) = \frac{1}{2}(xv - yu)$ (olettaen, että tämä lauseke on positiivinen). Lasketaan nyt $D_{\mathbf{w}}f$ pisteessä $(x, y, u, v) = (3, 1, 2, 4)$ ja saadaan

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{w}}f &= f' \cdot \mathbf{w} \frac{1}{|\mathbf{w}|} = \frac{1}{2}(v, -u, -y, x) \cdot (-x, ay, -u, av) \frac{1}{|\mathbf{w}|} \\ &= (-vx - ayu + uy + avx) \frac{1}{2|\mathbf{w}|} = (a - 1)f(x, y, u, v) \frac{1}{2|\mathbf{w}|}. \end{aligned}$$

Pinta-ala siis kasvaa täsmälleen silloin kun $a > 1$ eikä tämä riipu valitusta kolmiosta. (Huomaa, että tässä laskussa vaatimus että suuntavektorin pituus on 1 ei ollut oleellinen, vaan aiheutti lähinnä turhaa lisätyötä!)

7. Leena, Paula ja Kaija lähtivät matkaan samasta paikasta. Leena käveli länteen ja totesi että lämpötila laski nopeudella $0,3^\circ/\text{km}$, Paula käveli kaakkoon ja hän totesi että lämpötila ei muuttunut lainkaan. Jos Kaija käveli koilliseen, ennusta miten hänen mittauksensa mukaan lämpötila muuttui.

Ratkaisu: Otetaan käyttöön koordinaattisysteemi missä x -akseli osoittaa itään, ja y -akseli pohjoiseen ja origo on pisteessä mistä lähdettiin liikkeelle. Jos $f(x, y)$ on lämpötila (yksikkönä aste ja etäisyydet mitataan kilometreissä) niin

$$D_{-\mathbf{i}}f(0, 0) = -0,3$$

$$D_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}f(0, 0) = 0$$

Jos nyt $f'(0, 0) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ niin tämä tarkoittaa sitä, että

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i}) = -\frac{3}{10}$$

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j}) \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Mutta silloin $-a = -\frac{3}{10}$ ja $a - b = 0$ jolloin $a = \frac{3}{10}$ ja $b = \frac{3}{10}$. Silloin

$$D_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}f(0,0) = \left(\frac{3}{10}\mathbf{i} + \frac{3}{10}\mathbf{j}\right) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} \approx 0,42.$$

Näin ollen lämpötila nousi $0,42^\circ/\text{km}$.

Tangenttitaso

8. Määritä pinnan $x^2 + y^2 + 4x + 2y + z^2 + z = 10$ tangenttitaso pisteessä $(1, -1, 2)$.

Ratkaisu: Tarkistetaan ensin, että piste $(1, -1, 2)$ toteuttaa yhtälön ja todetaan, että $1^2 + (-1)^2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2^2 + 2 = 10$ niin kuin pitääkin. Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4x + 2y + z^2 + z - 10$ derivaatta eli gradientti on

$$(2x + 4, 2y + 2, 2z + 1) = (2x + 4)\mathbf{i} + (2y + 2)\mathbf{j} + (2z + 1)\mathbf{k},$$

eli pisteessä $(1, -1, 2)$ tangenttitason normaali on

$$(2 + 4)\mathbf{i} + (-2 + 2)\mathbf{j} + (4 + 1)\mathbf{k} = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{k},$$

ja tangenttitason yhtälö on

$$6(x - 1) + 5(z - 2) = 0 \quad \text{eli} \quad 6x + 5z = 16.$$

Lineaarinen approksimointi

9. Arvioi derivaatan avulla virhettä, joka tehdään kun lasketaan suoran ympyräkartion tilavuus käyttäen pohjan säteen likiarvona 2 m ja korkeuden likiarvona 4 m mittaustarkkuuden ollessa 1 cm. (Ympyräkartion tilavuus on $\frac{\pi r^2 h}{3}$ missä h on korkeus ja r pohjan säde.)

Ratkaisu: Merkitään $f(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Lineaarisella approksimaatiolla saadaan

$$f(r + \Delta r, h + \Delta h) - f(r, h) \approx f_r(r, h)\Delta r + f_h(r, h)\Delta h = \frac{2\pi r h}{3}\Delta r + \frac{\pi r^2}{3}\Delta h.$$

Koska nyt $r = 2$, $h = 4$, $|\Delta r| \leq 0,01$ ja $|\Delta h| \leq 0,01$ niin saadaan

$$|f(r + \Delta r, h + \Delta h) - f(r, h)| \lesssim \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 4}{3} 0,01 + \frac{\pi \cdot 2^2}{3} 0,01 \approx 0,21.$$
