

Suppenemiskriteerit, arviot ym.

1. Suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, ja jos se suppenee, mikä on sarjan summa? ($\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.)

Ratkaisu: Koska $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, niin

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1},$$

joten $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)}$ eli sarja suppenee ja sen summa on 1

2. Suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+4)!}{k! 4^k}$?

Ratkaisu:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+5)!}{(k+1)! 4^{k+1}} \cdot \frac{k! 4^k}{(k+4)!} = \frac{k+5}{4(k+1)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} < 1,$$

eli sarja suppenee suhdetestin nojalla.

3. Osoita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ suppenee kun $p > 1$ ja määritä yläraja lausekeelle $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Ratkaisu: Kun $t \in [n-1, n]$ niin pätee $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{t^p}$ joten

$$\frac{1}{n^p} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^p} dt.$$

Tästä taas seuraa, että

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^p} &\leq \sum_{n=N+1}^M \int_{n-1}^n \frac{1}{t^p} dt = \int_N^M \frac{1}{t^p} dt \\ &= \int_N^M \left(-\frac{1}{p-1} \frac{1}{t^{p-1}} \right) = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{M^{p-1}} + \frac{1}{p-1} \frac{1}{N^{p-1}}. \end{aligned}$$

Jos nyt $p > 1$ niin $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^{p-1}} = 0$ ja $\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{p-1} \frac{1}{N^{p-1}}$ joten sarja $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ suppenee ja $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{p-1} \frac{1}{N^{p-1}}$.

4. Oletetaan, että $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ kun $n \geq n_0$ ja että $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Osoita, että sarja $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ suppenee ja että $|\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n| \leq a_N$.

Ratkaisu: Merkitään

$$Y_m = \sum_{n=n_0}^{2m} (-1)^n a_n \quad \text{ja} \quad A_m = \sum_{n=n_0}^{2m+1} (-1)^n a_n, \quad m \geq m_0,$$

(missä $2m_0 \geq n_0$). Nyt pätee

$$Y_m - A_m = -(-1)^{2m+1} a_{2m+1} = a_{2m+1} \geq 0,$$

$$Y_{m+1} - Y_m = (-1)^{2m+1} a_{2m+1} + (-1)^{2m+2} a_{2m+2} = a_{2m+2} - a_{2m+1} \leq 0,$$

ja

$$A_{m+1} - A_m = (-1)^{2m+2} a_{2m+2} + (-1)^{2m+3} a_{2m+3} = a_{2m+2} - a_{2m+3} \geq 0.$$

Koska tämän perusteella $Y_m \leq Y_{m_0}$ niin pätee $A_m \leq Y_{m_0}$ ja vastaavasti koska $A_m \geq A_{m_0}$ niin $Y_m \geq A_{m_0}$. Näin ollen nähdään, että (Y_m) on ei-kasvava jono joka on alhaalta rajoitettu ja (A_m) on ei-vähenevä jono joka on ylhäältä rajoitettu joten molemmat raja-arvot $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m$ ja $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m$ ovat olemassa. Koska $Y_m - A_m = a_{2m+1}$ niin $\lim_{m \rightarrow \infty} (Y_m - A_m) = 0$ ja $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m$. Näin ollen alkuperäisen sarjan osasummat konvergoivat ja sarja suppenee. Koska $Y_{m+1} \leq Y_m$ ja $A_{m+1} \leq A_m$ niin

$$\left| \sum_{n=2m+1}^{\infty} (-1)^n a_n \right| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k - Y_m \right| = Y_m - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \leq Y_m - A_m = a_{2m+1},$$

ja

$$\left| \sum_{n=2m}^{\infty} (-1)^n a_n \right| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} A_k - A_{m-1} \right| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k - A_{m-1} \right| \leq Y_m - A_{m-1} = a_{2m},$$

eli aina pätee $\left| \sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_N$.

5. Suppeneeko sarja (perustele!) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+1}$?

Ratkaisu: Sovelletaan alternoivan sarjan suppenemiskriteeriä jolloin on tarkistettava että

$$\frac{n+1}{n^2+n+1} \geq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0,$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n^2+n+1} - \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+(n+1)+1} \\ &= \frac{(n+1)(n^2+3n+3) - (n+2)(n^2+n+1)}{(n^2+n+1)((n+1)^2+(n+1)+1)} \\ &= \frac{n^2+3n+1}{(n^2+n+1)((n+1)^2+(n+1)+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Alternoivan sarjan suppenemiskriteerin perusteella sarja suppenee.

6. Määritä N niin, että virhe, joka syntyy kun sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ summaa approksimoidaan laskemalla yhteen sarjan N ensimmäistä termiä, on itseisarvoltaan $< 10^{-6}$.

Ratkaisu: Käytetään suhdetestiä ja lasketaan

$$\frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{n e^{-n^2}} = \frac{n+1}{n} e^{-2n-1}.$$

Kun $n \rightarrow \infty$ niin $\frac{n+1}{n} e^{-2n-1} \rightarrow 0$ ja jos nyt esim. $n \geq 3$ niin $\frac{n+1}{n} e^{-2n-1} \leq \frac{1}{100}$. Näin ollen saadaan jos $N \geq 2$,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n e^{-n^2} \leq (N+1) e^{-(N+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99} (N+1) e^{-(N+1)^2}.$$

Jos $N = 2$ niin saadaan $\frac{100}{99} (N+1) e^{-(N+1)^2} \approx 3.7 \cdot 10^{-4}$ ja kun $N = 3$ saadaan $\frac{100}{99} (N+1) e^{-(N+1)^2} \approx 4.5 \cdot 10^{-7}$, joten riittää valita $N \geq 3$.

7. Määritä N siten, että jos sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$ summaa approksimoidaan äärellisellä summalla $\sum_{n=0}^N \frac{n}{n^4 + 1}$, niin virhe on itseisarvoltaan korkeintaan 10^{-6} .

Ratkaisu: Koska $0 \leq \frac{n}{n^4 + 1} \leq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$ niin sarja suppenee ja

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{3 - 1} \frac{1}{N^2},$$

joten jos halutaan, että virhe on korkeintaan 10^{-6} niin riittää valita N siten, että $\frac{1}{2} \frac{1}{N^2} \leq 10^{-6}$ eli $N \geq 708 > \sqrt{5 \cdot 10^5} \approx 707.1$

8. Suppeneeko sarja

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-2)}{k^2 + k} \quad (b) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\sqrt{k} + 1}{k - 2}?$$

Ratkaisu: (a) Kirjoitetaan $\frac{(-1)^k (k-2)}{k^2 + k} = \frac{(-1)^k k}{k^2 + k} - \frac{(-1)^k 2}{k^2 + k} = \frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{(-1)^k 2}{k^2 + k}$. Selvästikin $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0$ ja $\frac{1}{(k+1)+1} \leq \frac{1}{k+1}$ joten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ suppenee alternoivan sarjan suppenmiskriteerin nojalla. Toisaalta $\left| \frac{(-1)^k 2}{k^2 + k} \right| \leq \frac{2}{k^2}$ ja koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2}{k^2 + k}$ suppenee ja silloin alkuperäisenkin sarja suppenee. (Jälkimmäinen sarja suppenee tietenkin myös alternoivan sarjan suppenmiskriteerin nojalla.)

(b) Koska

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{k}+1}{k-2}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k + \sqrt{k}}{k - 2} = 1 > 0,$$

ja koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ hajaantuu, niin todetaan vertailuperiaatteen nojalla, että sarja hajaantuu.

9. Oletetaan, että $a_{n,m} \geq 0$ kun $n \geq n_0$ ja $m \geq m_0$. Osoita, että

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n,m}$$

(missä lukee $\infty = \infty$ jos sarjat hajaantuvat), eli tässä tapauksessa summausjärjestyksellä ei ole merkitystä.

Ratkaisu: Olkoon $S = \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{n,m}$ jos tämä on äärellinen luku ja muussa tapauksessa olkoon S mielivaltainen positiivinen luku.

Jos nyt ϵ on mielivaltainen luku niin on olemassa luku N siten, että

$$\sum_{n=n_0}^N \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{n,m} > S - \frac{\epsilon}{2}.$$

Jos jollakin $n_*, n_0 \leq n_* \leq N$ pätee $\sum_{m=m_0}^{\infty} a_{n_*,m} = \infty$ niin löytyy M siten, että $\sum_{m=m_0}^M a_{n_*,m} > S$ ja silloin myös $\sum_{n=n_0}^N \sum_{m=m_0}^M a_{n,m} > S - \epsilon$. Jos näin ei ole niin todetaan, että koska määritelmän mukaan jokaisella n pätee $\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=m_0}^M a_{n,m} = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{n,m}$ niin löytyy luku M siten, että jokaisella $n, n_0 \leq n \leq N$ pätee

$$\sum_{m=m_0}^M a_{n,m} > \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{n,m} - \frac{\epsilon}{2(N - n_0 + 1)},$$

joten

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^N \sum_{m=m_0}^M a_{n,m} &> \sum_{n=n_0}^N \left(\sum_{m=m_0}^{\infty} a_{n,m} - \frac{\epsilon}{2(N - n_0 + 1)} \right) \\ &> S - \frac{\epsilon}{2} - (N - n_0 + 1) \frac{\epsilon}{2(N - n_0 + 1)} = S - \epsilon. \end{aligned}$$

Mutta silloin pätee myös

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n,m} \geq \sum_{m=m_0}^M \sum_{n=n_0}^N a_{n,m} = \sum_{n=n_0}^N \sum_{m=m_0}^M a_{n,m} > S - \epsilon.$$

Koska ϵ oli mielivaltainen niin pätee $\sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n,m} \geq S$ ja luvun S valinnasta seuraa että

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n,m} \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{n,m}.$$

Samanlaisella päättelyllä saadaan myös $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{n,m} \geq \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n,m}$ eli väite on todistettu.

10. Jos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, niin määritä luvut c_n siten, että $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Sarjojen suppenemisestä ei tarvitse välittää. Kirjoita sarjat muodossa $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ ja $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$, kerro ne keskenään, kerää yhteen termit joilla on sama x :n potenssi ja päättelee tämän perusteella miten c_n esitetään lukujen a_j ja b_j avulla.

Ratkaisu: Yksinkertainen lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) \\ = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots\end{aligned}$$

Tästä päätellään, että

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \geq 0.$$

Tämä jono $(c_n)_{n=0}^\infty$ kutsutaan jonojen (a_n) ja (b_n) konvoluutioksi ja huomaa, että sen määrittelyssä esiintyy vain äärellisiä summia joten ei ole tarpeen tehdä oletuksia sarjojen suppenemisestä. Mutta olettaen, että sarjat suppenevat itseisesti, niin saadaan

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_k b_n x^{k+n} \\ &= \sum_{k+n=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_k b_{m-k} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right) x^m.\end{aligned}$$

Potenssisarjat

11. Määritä potenssisarjan suppenemissäteet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{(k+1)^2} x^k,$$

suppenemissäde.

Ratkaisu: Tarkistetaan suhdetestin avulla milloin sarja suppenee ja lasketaan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{5^{k+1} x^{k+1}}{((k+1)+1)^2}}{\frac{5^k x^k}{(k+1)^2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^2 5|x| = 5|x|.$$

Suhdetestin nojalla sarja suppenee kun $5|x| < 1$ eli $|x| < \frac{1}{5}$ ja hajaantuu kun $5|x| > 1$ eli $|x| > \frac{1}{5}$. Tästä päätellään suoraan, että suppenemissäde on $\frac{1}{5}$.

12. Etsi seuraavan potenssisarjan suppenemissäde:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)} x^{2k}.$$

Ratkaisu: Tarkistetaan suhdetestin avulla milloin sarja suppenee ja lasketaan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2) x^{2(k+1)}}{k! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2) \cdot (3k+1) x^{2k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{3k+1} x^2 = \frac{1}{3} x^2,$$

Suhdetestin nojalla sarja suppenee kun $\frac{1}{3} x^2 < 1$ eli $|x| < \sqrt{3}$ ja hajaantuu kun $\frac{1}{3} x^2 > 1$ eli $|x| > \sqrt{3}$. Tästä päätellään suoraan, että suppenemissäde on $\sqrt{3}$.

13. Määritä potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$ suppenemissäde. Miten se voidaan määrittää summafunktion lausekkeesta?

Ratkaisu: Kyseessä on geometrinen sarja missä suhde $q = -2x^2$. Näin ollen sarja suppenee täsmälleen silloin kun $|-2x^2| = 2|x|^2 < 1$ eli kun $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Näin ollen suppenemissäde on $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Geometrisen sarja summakaavasta seuraa, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n} = \frac{1}{1 + 2x^2}.$$

Reaaliakselilla tämä on hyvin määritelty ja äärettömän monta kertaa derivoituva funktio mutta jos määritellään $f(z) = \frac{1}{1+2z^2}$ missä z on kompleksiluku niin nähdään että tällä funktiolla on singularitetteja nimittäjän nollakohdassa, eli pisteissä $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Näiden etäisyys origosta ($x_0 = 0$ sarjakehitelmässä) on täsmälleen suppenemissäde.

14. Etsi annettujen funktioiden Maclaurinin sarjat sopivia ”perussarjoja” hyväksi käyttäen:

$$(a) \quad e^{3x+1}, \quad (b) \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad (c) \quad x \sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Vihje b-kohtaan: Käytä sinin yhteenlaskukaavaa.

Ratkaisu:

(a)

$$e^{3x+1} = e \cdot e^{3x} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k e}{k!} x^k.$$

(b)

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x - \cos x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right). \end{aligned}$$

(c)

$$x \sin\left(\frac{x}{3}\right) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{3}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{2k+1} (2k+1)!} x^{2k+2}.$$

15. Kehitä funktio $\frac{1}{(x+1)^2}$ sarjaksi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$.

Ratkaisu: Koska $\frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{x+1}$ ja potenssisarjoja voi derivoida termeittäin, niin haetaan ensin funktion $\frac{1}{x+1}$ sarjakehitelmä ja käyttäen hyväksi geometrisen sarja summakaavaa saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{2+x-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}(x-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}(x-1)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n. \end{aligned}$$

Tästä saadaan derivoimalla

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)^2} &= -\frac{d}{dx} \frac{1}{x+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{n+1}} (x-1)^{n-1} \stackrel{m=n-1}{=} -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (m+1)}{2^{m+2}} (x-1)^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} (x-1)^n. \end{aligned}$$

16. Esitä integraali $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$ sarjana. Montako termiä sarjasta on laskettava yhteen, jotta virheen itseisarvo olisi korkeintaan 10^{-6} .

Ratkaisu: Koska $\ln(1+s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{s^n}{n}$ niin $\ln(1+t^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{n}$ jolloin siis

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+t^2) dt &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{n} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{n(2n+1)} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(2n+1)}. \end{aligned}$$

Jotta nähtäisiin, että sarja todella voidaan integroida termeittäin todetaan, että koska sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{n}$ toteuttaa alternoivaa sarjaa koskevan suppenemistuloksen ehdot niin pätee

$$\left| \ln(1+t^2) - \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{n} \right| \leq \frac{t^{2(N+1)}}{N+1}, \quad t \in [0, 1],$$

joten

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \ln(1+t^2) dt - \int_0^1 \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{n} dt \right| &\leq \int_0^1 \frac{t^{2(N+1)}}{N+1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{2N+3}}{(N+1)(2N+3)} dt = \frac{1}{(N+1)(2N+3)} \end{aligned}$$

Jos nyt $N = 705$ niin $\frac{1}{(N+1)(2N+3)} = \frac{1}{997578} > 10^{-6}$ ja jos $N = 706$ niin $\frac{1}{(N+1)(2N+3)} = \frac{1}{1000405} < 10^{-6}$. Näin ollen on sarjasta laskettava yhteen vähintään 706 termiä.

17. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + k(k+1)y(x) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$

missä $k \geq 0$ on kokonaisluku, sarjakehitelmän avulla ja laske ainakin neljä ensimmäistä termiä. Millä alkuarvojen arvoilla ratkaisu on polynomi?

Ratkaisu: Haetaan ratkaisu muodossa $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jolloin $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $xy'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$, $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$ ja $x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$. Kun nämä lausekkeet sijoitetaan yhtälöön saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + k(k+1)a_n \right) x^n = 0.$$

Jotta meillä olisi ratkaisu on siis valittava a_n siten, että

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + k(k+1)a_n = 0,$$

eli

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - k(k+1)}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Alkuarvoista seuraa, että $a_0 = y_0$ ja $a_1 = y_1$ joten saadaan

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-k(k+1)}{2} y_0, & a_4 &= \frac{(3 \cdot 2 - k(k+1))(-k(k+1))}{4!} y_0, & \dots, \\ a_3 &= \frac{2 - k(k+1)}{3 \cdot 2} y_1, & a_5 &= \frac{(4 \cdot 3 - k(k+1))(2 - k(k+1))}{5!} y_1, & \dots \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että $a_{k+2} = 0$ ja siten myös kaikki $a_{k+2m} = 0$ mutta a_{k+1+2m} on nolla ainoastaan jos vastaava alkuarvo on 0. Näin ollen nähdään, että ratkaisu on polynomi jos $y_0 = 0$ kun k on pariton ja $y_1 = 0$ kun k on parillinen. Nämä polynomit (kerrottuina sopivilla vakioilla) ovat ns. Legendren polynomeja P_k ja niillä on se hyödyllinen ominaisuus, että $\int_{-1}^1 P_j(x) P_k(x) dx = 0$ jos $j \neq k$.

18. Ratkaise differentiaaliyhtälön $x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0$ sarjakehitelmällä kun $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 0$.

Ratkaisu: Olkoon $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. (Koska $y''(x)$:n kerroin on 0 kun $x = 0$ niin ei ole mitään takeita siitä, että tämä onnistuu tällä tavalla.) Ehdoista $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 0$ seuraa $a_0 = 1$ ja $a_1 = 0$. Nyt $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ja $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ joten $xy'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ ja $x^2 y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$. Samoin $x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^m$. Sijoittamalla nämä lausekkeet yhtälöön saadaan ehdoksi

$$a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n(n-1) + n) a_n + a_{n-2} \right) x^n = 0.$$

Tästä seuraa $a_1 = 0$ (mikä jo todettiin edellä) sekä $n^2 a_n + a_{n-2} = 0$, eli

$$a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}.$$

Koska $a_1 = 0$ niin todetaan, että $a_n = 0$ kun n on pariton. Parillisilla indekseillä saadaan

$$a_{2k} = -\frac{1}{2^2 k^2} a_{2(k-1)},$$

josta helposti päätellään, että

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Näin ollen ratkaisuksi tulee (mikäli sarja suppenee)

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2} x^{2k}.$$

Suhdetestin avulla todetaan, että tämän sarjan suppenemissäde on ääretön, jolloin kaikki edellä suoritettut laskut ovat kelvollisia ja kyseinen sarja on yhtälön ratkaisu. (Tämä funktio merkitään tavallisesti $y(x) = J_0(x)$.)
