13.4.2007

Numeeriset menetelmät

1. Määritä virhe (tai ainakin sen suuruusluokka) kun differentiaaliyhtälön $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ ratkaisemiseksi käytetään Eulerin menetelmää askelpituudella h ja lasketaan $\frac{a}{h}$ askelta (eli ratkaistaan yhtälö välillä $[x_0, x_0 + a]$).

Ratkaisu: Oletetaan, että f on jatkuvasti derivoituva jolloin voidaan osoittaa että differentiaaliyhtälön ratkaisu on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva. Olkoon Taylorin kehitelmän mukaan

$$y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + \tfrac{1}{2}y''(s)h^2,$$

missä $x_n < s < x_n + h$. Differentiaaliyhtälöstä seuraa, että

$$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)).$$

Koska Eulerin menetelmän mukaan $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ niin saadaan

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y(x_{n+1}) &= y_n - y(x_n) + h\big(f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n))\big) - \tfrac{1}{2}y''(s)h^2 \\ &= y_n - y(x_n) + hf_y(x_n, t)(y_n - y(x_n)) - \tfrac{1}{2}y''(s)h^2 \end{aligned}$$

missä t on piste y_n:n ja $y(x_n)$:n välillä. Näin ollen on olemassa vakiot C_1 ja C_2 siten, että

$$|y_{n+1} - y(x_{n+1})| \le (1 + C_1h)|y_n - y(x_n)| + C_2h^2.$$

Koska $y_0 - y(x_0) = 0$ niin $|y_1 - y(x_1)| \le C_2h^2$, $|y_2 - y(x_2)| \le \big((1 + C_1h) + 1\big)C_2h^2$ induktiolla osoitetaan sitten, että

$$|y_{n+1} - y(x_{n+1})| \le C_2h^2 \sum_{j=0}^{n} (1 + C_1h)^j.$$

Koska $1 + C_1h \le \mathrm{e}^{C_1h}$ niin saadaan karkealla arviolla

$$|y_{n+1} - y(x_{n+1})| \le C_2h^2(n + 1)\mathrm{e}^{C_1(n+1)h},$$

Jos nyt $n + 1 = \frac{a}{h}$ niin saadaan

$$|y_{n+1} - y(x_0 + ah)| \le C_2ah\mathrm{e}^{C_1a} = O(h).$$

---

2. Ratkaise likimääräisesti differentiaaliyhtälö $y'(x) = -xy(x)$, $y(0) = 1$ Eulerin parannetulla menetelmällä laskemalla yksi askel askelpituudella $h = 0.2$ ja kaksi askelta kun $h = 0.1$.

Ratkaisu: Koska $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ saadaan Eulerin parannetulla menetelmällä kun $h = 0.2$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0) = 0 \\ k_2 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = -0.04 \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.98 \\ x_1 &= x_0 + h = 0.2 \end{aligned}$$

On siis saatu $y(0.2) \approx 0.98$.

Kun $h = 0.1$ saadaan Eulerin parannetulla menetelmällä

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) = 0\\
k_2 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = -0.01\\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.995\\
x_1 &= x_0 + h = 0.1
\end{aligned}$$

ja sitten

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_1, y_1) = -0.00995\\
k_2 &= hf(x_1 + h, y_1 + k_1) = -0.019701\\
y_2 &= y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.980175\\
x_2 &= x_1 + h = 0.2
\end{aligned}$$

On siis saatu $y(0.2) \approx 0.980175$. Näiden approksimaatioiden erotus on itseisarvoltaan 0.000175 ja koska tarkka ratkaisu on 0.9801986733067 niin nähdään että paremman ($h = 0.1$, kaksi askelta) approksimaation virhe on noin $2 \cdot 10^{-5}$ ja se on selvästi pienempi kuin approksimaatioiden erotuksen itseisarvo.

---

3. Sovella (4. kertaluvun) Runge-Kuttan menetelmää yhtälöön $y'(x) = xy(x)$, $y(0) = 1$. Laske yksi askel kun $h = 0.4$ ja kaksi askelta kun $h = 0.2$. määritä virhe ja vertaa se approksomaatioiden erotukseen. (Tarkka ratkaisu on $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$.)

Ratkaisu: Koska $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ saadaan Runge-Kuttan (4. kertaluvun) menetelmällä kun $h = 0.4$

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) = 0\\
k_2 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.08\\
k_3 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.0832\\
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.173312\\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.083285333\\
x_1 &= x_0 + h = 0.4
\end{aligned}$$

On siis saatu $y(0.4) \approx 1.083285333$.

Kun $h = 0.2$ saadaan Runge-Kuttan menetelmällä

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) = 0\\
k_2 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.02\\
k_3 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.0202\\
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.040808\\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.0202\\
x_1 &= x_0 + h = 0.2
\end{aligned}$$

ja sitten

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_1, y_1) = 0.04080805333 \\
k_2 &= hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.0624363216 \\
k_3 &= hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.06308516965 \\
k_4 &= hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.08666292024 \\
y_2 &= y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.083286993 \\
x_2 &= x_1 + h = 0.4
\end{aligned}
$$

On siis saatu $y(0.4) \approx 1.083286993$.

Näiden approksimaatioiden erotus on itseisarvoltaan noin 10^{-6}. Koska ratkaisu on $e^{\frac{1}{2}x^2}$ niin $y(0.4) \approx 1.08328706767496$ joten $|1.08329 - y(0.4)| < 10^{-7}$ joten approksimaatioden erotus on suurempi kuin paremman approksimaation virhe.

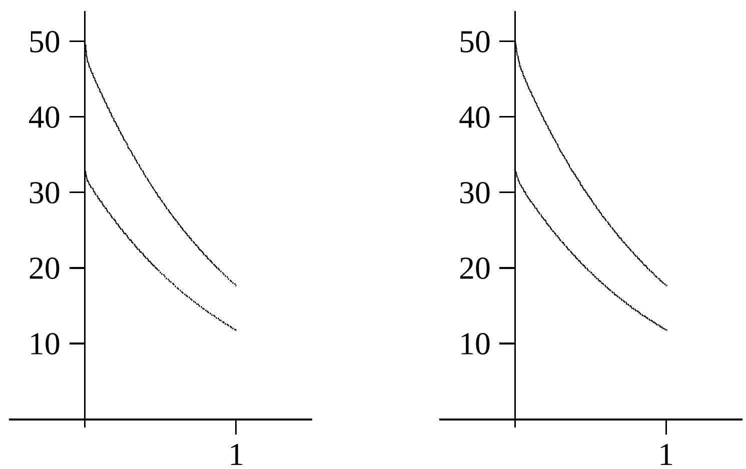
---

4. Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) &= 296y_1(t) - 198y_2(t), \\
y_2'(t) &= 594y_1(t) - 397y_2(t),
\end{aligned}
$$

aluarvoilla $y_1(0) = 33$ ja $y_2(0) = 50$ välillä $[0, 1]$ käyttämällä Runge-Kuttan 4. kertaluvun menetelmää askelpituudella $h = 0.01$, $h = 0.02$ ja $h = 0.04$. Mitä huomataan?

Ratkaisu: Kun yhtälösysteemi ratkaistaan askelpituuksilla $h = 0.01$ ja $h = 0.02$ saadaan seuraavanlaiset tulokset:



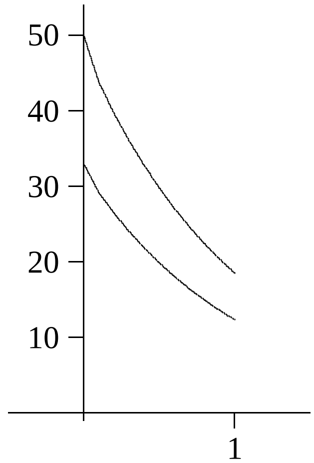
Tässä ratkaisujen erotusten itseisarvojen suurimmat arvot ovat 0.1927 ja ja 0.3854 eli tässä ei näytä olevan minkäänlaisia ongelmia. Mutta jos valitaan $h = 0.04$ niin saadaan approksimaatiot joiden arvot jo kohdalla $x = 0.4$ ovat $\approx 10^6$ eli täysin pielessä.

Syy tähän on se, että jos määritellään $u_1(t) = -3y_1(t) + 2y_2(t)$ ja $u_2(t) = 2y_1(t) - y_2(t)$ niin funktiot u_1 ja u_2 toteuttavat differentiaaliyhtälösysteemin

$$
\begin{aligned}
u_1'(t) &= -100u_1(t), \\
u_2'(t) &= -u_2(t).
\end{aligned}
$$

Alkuarvoina on $u_1(0) = 1$ ja $u_2(0) = 16$. Alkuperäisen systeemin ratkaisun kannalta u_1 on aika merkityksetön ja lähestyy nopeasti nollaa mutta kun yhtälö ratkaistaan numeerisesti askelpituus on kertoimen -100 takia valittava suhteellisen pieneksi (eli paljon pienemmäksi kuin mitä toinen kerroin -1 sinänsä vaatisi). Tässä on siis kaksi aikaskaalaa ja pienempi määrittää suurimman mahdollisen askelpituuden.

Implisiittisellä Eulerin menetelmällä ja askelpituudella 0.1 saadaan seuraavanlainen ratkaisu ja jos lasketaan tämän ja edellä askelpituudella 0.01 lasketun approksimaation erotus niin se on korkeintaan 0.5652 ja 0.8479 eri komponentilla. Eli implisiittisellä menetelmällä saadaan kohtullinen approksimaatio jo aika pitkällä askelpituudella.



---

5. Selvitä mikä on yhden askeleen virhe eri menetelmissä soveltamalla niitä yhtälöön $y'(x) = \alpha y(x)$, $y(0) = 1$ kun askelpituus on h.

Ratkaisu: Tarkastellaan ensin parannettua Eulerin menetelmää jolloin saadaan

$$\begin{aligned} k_1 &= h(f(x_0, y_0) = \alpha h, \\ k_2 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = \alpha h(1 + \alpha h), \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{2}(\alpha h + \alpha h + (\alpha h)^2) = 1 + \alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2. \end{aligned}$$

Tarkka ratkaisu on tietenkin $y(h) = \mathrm{e}^{\alpha h} = 1 + \alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2 + \frac{1}{6}\mathrm{e}^t(\alpha h)^3$, missä t on 0:n ja αh:n välillä. Tästä nähdään, että $y_1 - y(h) = O(h^3)$.

Seuraavaksi tarkastellaan implisiittistä Eulerin menetelmää jolloin saadaan

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = \alpha h(1 + k_1) \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{\alpha h}{1 - \alpha h}, \\ y_1 &= y_0 + k_1 = 1 + \frac{\alpha h}{1 - \alpha h}. \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa nähdään, että

$$\begin{aligned} y_1 - y(h) = 1 + \frac{\alpha h}{1 - \alpha h} - \left(1 + \alpha h + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\alpha h)^2\right) &= \frac{\alpha h - (1 - \alpha h)\alpha h}{1 - \alpha h} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\alpha h)^2 \\ &= \frac{(\alpha h)^2}{1 - \alpha h} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\alpha h)^2 = O(h^2). \end{aligned}$$

Tarkastellaan lopuksi vielä implisiittistä keskipistemenetelmää:

$$k_1 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = \alpha h(1 + \tfrac{1}{2}k_1) \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{\alpha h}{1 - \frac{1}{2}\alpha h},$$

$$y_1 = y_0 + k_1 = 1 + \frac{\alpha h}{1 - \frac{1}{2}\alpha h}.$$

Tässä tapauksessa nähdään, että

$$\begin{aligned} y_1 - y(h) = 1 + \frac{\alpha h}{1 - \frac{1}{2}\alpha h} - \left(1 + \alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2 + \frac{1}{6}\mathrm{e}^t(\alpha h)^3\right) \\ = \frac{\alpha h - (1 - \frac{1}{2}\alpha h)(\alpha h + \frac{1}{2}(\alpha h)^2)}{1 - \alpha h} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^t(\alpha h)^3 \\ = \frac{\frac{1}{4}(\alpha h)^3}{1 - \alpha h} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^t(\alpha h)^3 = O(h^3). \end{aligned}$$

---

6. Ratkaise likimääräisesti differentiaaliyhtälö $y'(x) = x - y(x)^2$, $y(0) = 2$ Eulerin implisiittisellä menetelmällä laskemalla yksi askel askelpituudella $h = 0.1$.

Ratkaisu: Koska $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ ja $h = 0.1$ saadaan Eulerin implisiittisellä menetelmällä yhtälöksi

$$y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1) = 2 + 0.1 \cdot (0.1 - y_1^2) \quad \text{eli} \quad y_1^2 + 10y_1 - 20.1 = 0$$

josta saadaan

$$y_1 = -5 \pm \sqrt{25 + 20.1} = -5 \pm 6.7157.$$

Koska $y_1 \approx y_0$ niin valitaan $+$-merkki ja saadaan $y_1 = 1.7157$

---

7. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'(x) = -xy(x)$, $y(0) = 1$ numeerisesti välillä $[0, 1]$ käyttäen implisiittistä keskipistemenetelmää ja askelpituuksia 0.1, 0.05 ja 0.025. Olettaen, että virhe pisteessä $x = 1$ on $\approx Ch^m$, päättele mikä m voisi olla.

Ratkaisu: Implisiittinen keskipistemenetelmässä on ratkaistava k_1 yhtälöstä

$$k_1 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1),$$

eli tässä tapauksessa

$$k_1 = -h(x_n + \tfrac{1}{2}h)(y_n + \tfrac{1}{2}k_1) \quad \Rightarrow \quad k_1 = -\frac{h(x_n + \frac{1}{2}h)y_n}{1 + \frac{1}{2}h(x_n + \frac{1}{2}h)}.$$

Näin ollen saadaan

$$y_{n+1} = y_n - \frac{h(x_n + \frac{1}{2}h)y_n}{1 + \frac{1}{2}h(x_n + \frac{1}{2}h)} = \frac{1 - \frac{1}{2}h(x_n + \frac{1}{2}h)}{1 + \frac{1}{2}h(x_n + \frac{1}{2}h)}y_n.$$

Tulokset ovat seuraavat:

h	0.1	0.05	0.025	0.00125
$y(1) \approx$	0.60640	0.60650	0.60652	0.60653

Olkoon $a(h)$ approksimaatio kun askelpituus on h. Jos $a(h) - y(1) \approx Ch^m$ niin

$$a(h) - a(\tfrac{h}{2}) \approx Ch^m(1 - 2^{-m}),$$

ja erikoisesti

$$b(h) = \frac{a(h) - a(\frac{h}{2})}{a(\frac{h}{2}) - a(\frac{h}{4})} \approx \frac{Ch^m(1 - 2^{-m})}{Ch^m 2^{-m}(1 - 2^{-m})} = 2^m.$$

Tässä tapauksessa saadaan

$$b(0.1) = \frac{0.60640 - 0.60650}{0.60650 - 60652} = 3.9845,$$

ja

$$b(0.05) = \frac{0.60650 - 60652}{0.60652 - 60653} = 3.9961.$$

Koska $2^2 = 4$ niin päätellään tämän perusteella, että tässä tapauksessa $m = 2$.

---

8. Kirjoita differentiaaliyhtälö $y''(x) = xy(x) + y(x)y'(x)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$ differentiaaliyhtälösysteeminä ja laske yksi askel 4. kertaluvun Runge-Kuttan menetelmällä käyttäen askelpituutta $h = 0.2$.

Ratkaisu: Merkitään $y'(x) = u(x)$ jolloin $u'(x) = y''(x)$ ja yhtälösysteemiksi tulee

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} y(x) \\ u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ xy(x) + y(x)u(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Merkitään $\mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ u(x) \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{w}_j = \begin{pmatrix} y_j \\ u_j \end{pmatrix}$. Runge-Kuttan menetelmän mukaisesti lasketaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(x_0, \mathbf{w}_0) = 0.2 \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ x_0 y_0 + y_0 u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(x_0 + \tfrac{1}{2}h, \mathbf{w}_0 + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_1) \\
&= 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - 0.1 \\ (0 + 0.1)(-1 + 0.1) + (-1 + 0.1)(1 - 0.1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 \\ -0.18 \end{pmatrix} \\
\mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}(x_0 + \tfrac{1}{2}h, \mathbf{w}_0 + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_2) \\
&= 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - 0.09 \\ (0 + 0.1)(-1 + 0.09) + (-1 + 0.09)(1 - 0.09) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1820 \\ -0.1838 \end{pmatrix} \\
\mathbf{k}_4 &= h\mathbf{f}(x_0 + h, \mathbf{w}_0 + \mathbf{k}_3) \\
&= 0.2 \cdot \begin{pmatrix} 1 - 0.1838 \\ (0 + 0.2)(-1 + 0.1820) + (-1 + 0.1820)(1 - 0.1838) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1632 \\ -0.1662 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

jolloin

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_0 + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) = \begin{pmatrix} -0.8188 \\ 0.8177 \end{pmatrix}.$$

Näin ollen $y(0.2) \approx -0.8188$ ja $y'(0.2) \approx 0.8177$.

---

9. Merkinnällä $O(g(x))$ (välillä (a,b)) [kun $x \to a$] tarkoitetaan jokin funktio $f(x)$ jolle pätee $|f(x)| \le C|g(x)|$ jollakin vakiolla C (kun $x \in (a,b)$) [kun $|x-a| \le \delta$ jollakin $\delta > 0$ (jos $a \in \mathbb{R}$) ja kun $x \ge P$ jollakin P jos $a = \infty$)]. Miten lauseketta $O(h(x)) = O(g(x))$ olisi järkevällä tavalla tulkittava ja miksi tästä ei silloin aina seuraa, että $O(g(x)) = O(h(x))$. Selitä miksi

(a) $O(x^3) + O(x^4) = O(x^3)$ kun $x \to 0$ (tai $x \in (-1,1)$);
(b) $O(x^2) - O(x^2) = O(x^2)$;
(c) $h(x)O(g(x)) = O(h(x)g(x))$.

Ratkaisu: Järkevä tulkinta lausekkeelle $O(h(x)) = O(g(x))$ on että jos meillä on funktio $f(x)$ jolle pätee $|f(x)| \le C|h(x)|$ jollakin vakiolla C niin pätee myös $|f(x)| \le C'|g(x)|$ jollakin (toisella) vakiolla C'. Mutta tästä ei tietenkään seuraa, että varmuudella löytyy kolmas vakio C'' siten, että $|g(x)| \le C''|f(x)|$.

(a) Jos $|f(x)| \le C_1|x^3|$ ja $|g(x)| \le C_2|x^4|$ kun $|x| < 1$ niin $|f(x) + g(x)| \le (C_1 + C_2)|x^3|$ kun $|x| < 1$ koska $C_2|x| < C_2$, eli jos $f(x) = O(x^3)$ ja $g(x) = O(x^4)$ niin $f(x)+g(x) = O(x^3)$.

(b) Jos $|f(x)| \le C_1|x^2|$ ja $|g(x)| \le C_2|x^2|$ kun $|x| < 1$ niin $|f(x) - g(x)| \le (C_1 + C_2)|x^2|$ kun $|x| < 1$ eli jos $f(x) = O(x^2)$ ja $g(x) = O(x^2)$ niin $f(x) - g(x) = O(x^2)$.

(c) Jos $|f(x)| \le C|g(x)|$ niin $|h(x)f(x)| \le C|h(x)g(x)|$, eli jos $f(x) = O(g(x))$ niin $h(x)f(x) = O(h(x)g(x))$.

Jonot ja sarjat

10. Tarkastellaan rekursiivisesti määriteltyä lukujonoa

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n}), n = 1, 2, \cdots$$

Luettele jonon 4 ensimmäistä lukua, ja osoita, että

(a) $a_n \ge \sqrt{3}$, kun $n \ge 2$ (*Vihje*: Mikä on funktion $\frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$ minimi, kun $x > 0$?)
(b) jono on (lopulta) vähenevä (*Vihje*: Tutki erotusta $a_{n+1} - a_n$, ja käytä (a)-kohdan tulosta).

Jono on siis suppeneva (perustele). Etsi jonon raja-arvo.

Ratkaisu: Jonon 4 ensimmäistä lukua ovat:$1, 2, \frac{7}{4}, \frac{97}{56}$.

(a) Funktion $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$ minimin löytämiseksi tutkitaan sen derivaatan nollakohtaa. $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2} = 0, \Rightarrow x = \sqrt{3}$ ($x > 0$). Nyt pätee myös: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, joten $x = \sqrt{3}$:ssä on minimi funktiolle $f(x)$, kun $x > 0$. Tästä seuraa, että lukujonossa, jonka ensimmäinen termi on positiivinen ei voi esiintyä termejä joille $a_n \le \sqrt{3}$.

(b) Tutkitaan vihjeen mukaisesti erotusta $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2a_n} - a_n = \frac{1}{2}(-a_n + \frac{3}{a_n}) \ge 0 \iff \frac{1}{2}(-a_n + \frac{3}{a_n}) \le 0 \iff \frac{-a_n^2+3}{2a_n} \le 0$ ja tämä on voimassa kaikilla $n \ge 2$. Raja-arvosta tiedetään, että $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, $\Rightarrow L = \frac{1}{2}(L + \frac{3}{L})$ josta saadaan, että $L = \sqrt{3}$, (koska $L > 0$).

---

11. Esitä luku $0{,}132132132\ldots$ rationaalilukuna.

Ratkaisu: Koska numerot 132 toistuvat voidaan luku kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}132 \cdot 10^{-3} + 132 \cdot 10^{-6} + 132 \cdot 10^{-9} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 132 \cdot 10^{-3n} &= 132 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{1000}\right)^n \\ &= 132 \frac{\frac{1}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{132}{1000 - 1} = \frac{132}{999} = \frac{44}{333}.\end{aligned}$$

---

12. Yritys tekee investoinnin kohteeseen, josta se vuoden lopussa saa kassavirtana 5000 euroa. Seuraavina vuosina kassavirran arvoidaan olevan 6000 ja 7000 euroa jonka jälkeen arvoidaan, että kassavirta pienenee 3 % vuoisttain. Määritä kassavirtojen yhteenlaskettu nykyarvo kyseisen vuoden alussa kun laskentakorkona käytetään 7 %. (Jos laskentakorko on r niin k:n vuoden kuluttua saatavan rahasumman M nykyarvo on $(1 + r)^{-k} M$.)

Ratkaisu: Investoinnista saatavat kassavirrat ovat 5000, 6000, 7000, $7000(1 - 0.03)$, $7000(1 - 0.03)^2$ jne. ja tämän kassavirran nykyarvo tulee silloin olemaan

$$\begin{aligned}&(1 + 0.07)^{-1} \cdot 5000 + (1 + 0.07)^{-2} \cdot 6000 + (1 + 0.07)^{-3} \cdot 7000 \\ &\quad + (1 + 0.07)^{-4} \cdot 7000 \cdot (1 - 0.03) + (1 + 0.07)^{-5} \cdot 7000 \cdot (1 - 0.03)^2 + \ldots \\ &= 4672.90 + 5240.63 + \sum_{j=3}^{\infty} (1 + 0.07)^{-j} \cdot 7000 \cdot (1 - 0.03)^{j-3} \\ &= 4672.90 + 5240.63 + \frac{(1 + 0.07)^{-3} \cdot 7000}{1 - \frac{1-0.03}{1+0.07}} \\ &= 4672.90 + 5240.63 + \frac{(1.07)^{-3} \cdot 7000}{\frac{0.1}{1.07}} = 4672.90 + 5240.63 + \frac{70000}{(1.07)^2} \\ &= 4672.90 + 5240.63 + 61140.71 = 71054.24.\end{aligned}$$
