

Usean muuttujan funktiot

1. Van der Waalsin kaavan mukaan kaasun paine voidaan esittää kaavalla

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2a}{V^2}.$$

Tunnista tässä kaavoissa vakiot, parametrit ja muuttujat.

Ratkaisu: Mitään ehdotonta ja aina pätevää rajaa vakioiden, parametrien ja muuttujien välillä ei voida vetää. Tässä tapauksessa kaasuvakio $R = 8,314510 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$ on ilmeisesti vakio, luvut a ja b voidaan myös pitää vakioina kun tarkastellaan vain yhtä kaasua, mutta niitä voi myös pitää parametreina jos tarkastellaan monta erilaista kaasua. Moolimäärä n voi olla joko parametri tai muuttuja kun taas yleensä tilavuus V ja lämpötila T ovat muuttujia, mutta nekin voivat olla parametreina mutta harvoin vakioina. Näin ollen voidaan esimerkiksi esittää paine kahden muuttujan funktiona

$$p = f(V, T).$$

Toinen mahdollisuus on esittää paine yhden vektorimuuttujan funktiona

$$p = g\left(\begin{pmatrix} V \\ T \end{pmatrix}\right).$$

Yleensä ei tehdä eroa funktioiden f ja g välillä vaan ne pidetään saman funktiona. Yhtä hyvin paine voisi olla kolmen muuttujan funktio $p = h(V, T, n)$ tai yhden kolmeulotteisen vek-

torimuuttujan funktio $p = k\left(\begin{pmatrix} V \\ T \\ n \end{pmatrix}\right)$. Tässä vektorit voitaisiin yhtä hyvin kirjoittaa vaa-

kavektoreina. Jos otetaan parametrit a ja b huomioon saadaan $p = F(V, T, n, a, b)$ tai esim.

$$p = G\left(\begin{pmatrix} V \\ T \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right).$$

Tässä ei siis ole kysymys oikeasta tai väärästä ratkaisusta vaan selkeästä ja tarkoituksenmukaisesta tai sotkuisasta ja harhaanjohtavasta esitystavasta.

2. Olkoot $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ kuvaukset

$$f(\mathbf{x}) = (xy, x + y), \quad \mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \end{pmatrix}, \quad h(x) = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}.$$

Muodosta yhdistetty kuvaus $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ (identifioimalla eri tavalla esitetyt vektorit).

Ratkaisu: Lasketaan ensin $g(h(x))$ ja saadaan

$$g(h(x)) = g(1, x, x^2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot x \\ x \cdot x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Silloin

$$f(g(h(x))) = f(x\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}) = (x \cdot x^3, x + x^3) = (x^4, x + x^3).$$

Raja-arvot

3. Määritä raja-arvot

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, 0)} \frac{\cos(y) + 1}{y - \sin(x)},$$

$$(b) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x+y \neq 4}} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}.$$

Ratkaisu: (a) Sijoittamalla $x = \frac{\pi}{2}$ ja $y = 0$ saadaan nimittäjän raja-arvoksi $0 - \sin(\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0$ jolloin koko lausekkeen raja-arvoksi tulee

$$\frac{\cos(0) + 1}{0 - \sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{-1} = -2,$$

(eli tämä on niin yksinkertainen tapaus, ettei sitä oikeasti ehkä kannattaisi käsitellä ja siitä syystä tällaisia esimerkkejä tulee harjoituksissa ja kokeissa harvoin vastaan!)

(b) Kun $(x, y) \rightarrow (2, 2)$ niin $x + y \rightarrow 4$ ja koska oletetaan, että $x + y \neq 4$ niin saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x+y \neq 4}} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t-4}{\sqrt{t}-2} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t-4)(\sqrt{t}+2)}{(\sqrt{t}-2)(\sqrt{t}+2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t-4)(\sqrt{t}+2)}{t-4} = \lim_{t \rightarrow 4} (\sqrt{t}+2) = 4. \end{aligned}$$

4. Osoita, ettei raja-arvo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ei ole olemassa.

Ratkaisu: Ensiksi todetaan, että yleisesti pätee $\lim_{t \rightarrow 0+} f(\alpha t, \beta t) = L$ jos $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ja $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$. (Jos $\epsilon > 0$ niin on olemassa $\delta > 0$ siten että $|f(x, y) - L| < \epsilon$ aina kun $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ joten jos $0 < t < \delta / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ niin $\sqrt{(\alpha t)^2 + (\beta t)^2} < \delta$ ja saadaan $|f(\alpha t, \beta t) - L| < \epsilon$.) Nyt

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(\alpha t)(\beta t)}{(\alpha t)^2 + (\beta t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Jos nyt $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = L$ eli raja-arvo on olemassa saadaan

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = L,$$

mutta jos $\alpha = 0$ ja $\beta = 1$ niin saadaan $L = 0$ mutta jos $\alpha = \beta = 1$ saadaan $L = \frac{1}{2}$. Tästä ristiriidasta seuraa väite.

5. Määritä raja-arvo

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ x \neq 0, z \neq 0}} \frac{yx^2 \cos(\frac{1}{z}) + z^3 \sin(\frac{1}{x})}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ratkaisu: Termit $\cos(\frac{1}{z})$ ja $\sin(\frac{1}{x})$ ovat hankalia eikä niillä ole raja-arvoa kun $(x, y, z) \rightarrow 0$ joten yritetään päästä niistä eroon ja se tapahtuu toteamalla, että $|\cos(\frac{1}{z})| \leq 1$ ja $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$ joten

$$\left| \frac{yx^2 \cos(\frac{1}{z}) + z^3 \sin(\frac{1}{x})}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \frac{|y|x^2 + |z|^3}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Lisäksi $x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2$ ja $x^2 + y^2 + z^2 \geq z^2$ joten

$$\left| \frac{yx^2 \cos(\frac{1}{z}) + z^3 \sin(\frac{1}{x})}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \frac{|y|x^2}{x^2} + \frac{|z|^3}{z^2} = |y| + |z|,$$

ja koska

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ x \neq 0, z \neq 0}} (|y| + |z|) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} |y| + \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} |z| = \lim_{y \rightarrow 0} |y| + \lim_{z \rightarrow 0} |z| = 0 + 0 = 0,$$

niin kuristusperiaatteen nojalla seuraa, että myös

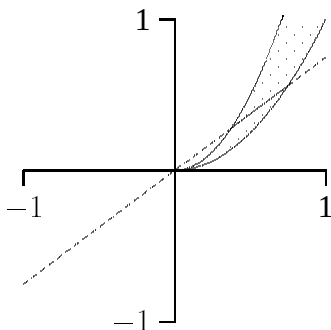
$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ x \neq 0, z \neq 0}} \frac{yx^2 \cos(\frac{1}{z}) + z^3 \sin(\frac{1}{x})}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

6. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x^2 < y < 2x^2, \ x > 0 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Piirrä joukko $\{(x, y) \mid f(x, y) = 1\}$. Onko funktiolla f raja-arvo origossa? Mikä on funktion raja-arvo origossa kun lähestytään suoraa pitkin. Anna ”graafinen” perustelu eli piirrä ”mielivaltainen” origosta lähtevä säde ja päättele millä säteen väleillä funktio f saa arvon 0 ja millä se saa arvon 1.

Ratkaisu:



Funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa, koska jos valitaan mikä tahansa δ -säteinen ympyrä, niin sen sisäpuolelta löytyy pisteitä (x, y) missä $f(x, y) = 0$ (kaikki pisteet missä $x < 0$ tai $y < 0$ ja $x^2 + y^2 < \delta^2$ mutta toisaalta sen sisäpuolelta löytyy esim. myös piste $(\frac{\delta}{2}, \frac{3\delta^2}{8})$ (oletetaan, että $\delta < 1$) jossa funktion f arvo on 1 koska $(\frac{\delta}{2})^2 < \frac{3\delta^2}{8} < 2(\frac{\delta}{2})^2$. Jos raja-arvo olisi olemassa ja olisi a ja valittaisiin $\epsilon = \frac{1}{4}$ niin löytyisi $\delta > 0$ siten, että kun $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ niin $|f(x, y) - a| < \epsilon = \frac{1}{4}$. Mutta tästä seuraisi, että $|1 - a| < \frac{1}{4}$ ja $|0 - a| < \frac{1}{4}$ jolloin $|1 - 0| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ mikä on ristiriita.

Kun lähestytään suoraa pitkin niin raja-arvo on 0 koska joko funktio on kaikkialla suoralla 0 tai sitten se on 1 suoran osajanelalla, joka ei kuitenkaan ulotu origoon asti.

7. Määritä raja-arvo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

Ratkaisu: Jos valitaan $x = \alpha t$ ja $y = \beta t$ ja lasketaan raja-arvo kun $t \rightarrow 0$ niin saadaan

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^3 \beta t^4}{\alpha^6 t^6 + \beta t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^3 \beta t^2}{\alpha^6 t^4 + \beta} = 0,$$

joten päätellään, että **jos** raja-arvo on olemassa niin se on 0. Mutta raja-arvo ei voi olla olemassa koska jos valitaan $x = t$ ja $y = t^3$ ja lasketaan raja-arvo kun $t \rightarrow 0$ niin saadaan vastaukseksi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 t^3}{t^6 + t^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

8. Olkoon $f(x, y) = \frac{4}{1+y^2 x^6}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Onko vaikeata osoittaa, että f on jatkuva $\mathbb{R}^2$:ssa? Olkoon $g(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y)$. Onko funktio g jatkuva $\mathbb{R}$:ssä?

Ratkaisu: Koska funktiot $y \mapsto y^2$ ja $x \mapsto x^6$ ovat jatkuvat niin myös funktiot $(x, y) \mapsto y^2$ ja $(x, y) \mapsto x^6$ ovat jatkuvat, samoin funktiot $(x, y) \mapsto y^2 x^6$ ja $(x, y) \mapsto 1 + y^2 x^6$ ovat jatkuvat koska jatkuvien funktioiden tulo ja summa ovat jatkuvat. Koska $1 + y^2 x^6 \geq 1 > 0$ niin myös funktio $(x, y) \mapsto \frac{4}{1+y^2 x^6}$ on jatkuva, koska jatkuvien funktioiden osamäärä on jatkuva kaikissa pisteissä missä nimittäjä on $\neq 0$. (Huomaa, että tätä päättelyä olisi voinut tehdä vielä yksityiskohtaisemmin, esim. antamalla tarkemmat perustelut sille, että vakiofunktio 1 ja 4 ovat jatkuvat, mutta tavallisesti nyt esitetty päättelykin menee turhan pitkälle, eli tärkein tarkistettava asia on ettei nimittäjä ole 0, muuten jatkuvuus on kaikilta osilta ilmeisen selvä!)

Koska $y^2 x^6 = 0$ jos $x = 0$ niin

$$g(0) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4}{1+0} = 4.$$

Jos $x \neq 0$ niin $x^6 > 0$ ja $\lim_{y \rightarrow \infty} (1 + y^2 x^6) = \infty$ josta seuraa, että

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + y^2 x^6} = \frac{4}{\infty} = 0.$$

Näin ollen

$$g(x) = \begin{cases} 4, & \text{jos } x = 0, \\ 0, & \text{jos } x \neq 0, \end{cases}$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \neq f(0) = 4.$$

Siis, g ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

Helposti nähdään myös, että $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{1+y^2 x^6} = 4$ kaikilla y joten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right) \neq \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right).$$

Tässä tapauksessa raja-arvojen järjestystä ei siis voi vaihtaa.

Osittaisderivaatat

9. Muodosta funktion $f(x, y) = \sin(x\sqrt{x+y})$ kaikki 1. ja 2. kertaluvun osittaisderivaatat muuttujien x ja y suhteen.

Ratkaisu: Suoralla laskulla todetaan, että

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \cos(x\sqrt{x+y}) \frac{\frac{3}{2}x+y}{\sqrt{x+y}}, \\f_y(x, y) &= \cos(x\sqrt{x+y}) \frac{x}{2\sqrt{x+y}}, \\f_{xy}(x, y) &= -\sin(x\sqrt{x+y}) \frac{\frac{3}{2}x^2+xy}{2(x+y)} + \cos(x\sqrt{x+y}) \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}} - \frac{\frac{3}{2}x+y}{2\sqrt{x+y}^3} \right), \\f_{xx}(x, y) &= -\sin(x\sqrt{x+y}) \frac{(\frac{3}{2}x+y)^2}{x+y} + \cos(x\sqrt{x+y}) \left(\frac{3}{2\sqrt{x+y}} - \frac{\frac{3}{2}x+y}{2\sqrt{x+y}^3} \right), \\f_{yy}(x, y) &= -\sin(x\sqrt{x+y}) \frac{x^2}{4(x+y)} - \cos(x\sqrt{x+y}) \frac{x}{4\sqrt{x+y}^3}.\end{aligned}$$

10. Mikko laski funktion g 1. kertaluvun osittaisderivaatat ja sai tulokseksi

$$g_x(x, y) = 2xy^2 - \sin(xy), \quad g_y(x, y) = 2x^2y - x^2 \cos(xy).$$

Mistä nähdään, että Mikko on laskenut väärin? (Älä hae funktiota g vaan laske osittaisderivaatat!)

Ratkaisu: Jos derivoidaan g_x muuttujan y suhteen niin saadaan

$$g_{xy} = 4xy - x \cos(xy),$$

ja jos derivoidaan g_y muuttujan x suhteen niin saadaan

$$g_{yx} = 4xy - 2x \cos(xy) + x^2 y \sin(xy).$$

Koska kaikki osittaisderivaatat ovat jatkuvia niin pitäisi olla $g_{xy} = g_{yx}$ kaikissa pisteissä (x, y) mutta tässä tapauksessa näin ei ole, joten jossain vaiheessa on laskettu väärin.

11. Funktio $u(t, x)$ toteuttaa yhtälön $u_t(t, x) = u_{xx}(t, x)$ kun $t > 0$ ja $0 < x < 1$ ja $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Määritä vakiot α, β ja γ , siten, että jos $v(s, y) = u(\gamma s, \alpha y + \beta)$ niin $v(s, y)$ toteuttaa yhtälön $v_s(s, y) = av_{yy}(s, y)$ kun $s > 0$ ja $A < y < B$ ja $v(s, A) = v(s, B) = 0$. Miten $u(0, x)$ olisi valittava jotta $v(0, y) = f(y)$, missä f in jokin annettu funktio?

Ratkaisu: Ehdoista seuraa, että kun $A < y < B$ niin pitää olla $0 < \alpha y + \beta < 1$. Lisäksi vaaditaan $\alpha A + \beta = 0$ ja $\alpha B + \beta = 1$. Tästä seuraa, että $\alpha(B - A) = 1$, eli $\alpha = \frac{1}{B-A}$ jolloin $\beta = -\frac{A}{B-A}$. Näin ollen $v(y, \cdot) = u(\gamma s, \frac{y-A}{B-A})$ ja

$$\begin{aligned}v_y(s, y) &= \frac{1}{B-A} u_x \left(\gamma s, \frac{y-A}{B-A} \right), \\v_{yy}(s, y) &= \frac{1}{(B-A)^2} u_{xx} \left(\gamma s, \frac{y-A}{B-A} \right), \\v_s(s, y) &= \gamma u_t \left(\gamma s, \frac{y-A}{B-A} \right).\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$v_s(s, y) - a v_{yy}(s, y) = \gamma u_t \left(\gamma s, \frac{y-A}{B-A} \right) - \frac{a}{(B-A)^2} u_{xx} \left(\gamma s, \frac{y-A}{B-A} \right).$$

Koska oletuksen mukaan $u_t(\gamma s, \frac{y-A}{B-A}) = u_{xx}(\gamma s, \frac{y-A}{B-A})$ niin $v_s(s, y) = a v_{yy}(s, y)$ mikäli $\gamma = \frac{a}{(B-A)^2}$. Näin ollen on siis valittava

$$\alpha = \frac{1}{B-A}, \quad \beta = -\frac{A}{B-A}, \quad \gamma = \frac{a}{(B-A)^2}.$$

Lisäksi nähdään, että jos $v(0, y) = f(y)$ niin $u(0, \alpha y + \beta) = f(y)$ ja merkitsemällä $\alpha y + \beta = x$ saadaan $y = \frac{1}{\alpha}(x - \beta)$ joten

$$u(0, x) = f \left((B-A) \left(x + \frac{A}{B-A} \right) \right) = f((B-A)x + A).$$

(Tästä siis nähdään, että kun ratkaistaan tämäntyyppisiä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, riittää tarkastella tapausta kun $0 < x < 1$ ja yhtälö on muotoa $u_t = u_{xx}$.)
