

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y''(t) + (4 + \delta)y'(t) + (4 + 2\delta)y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

missä $\delta > 0$. Mitä tapahtuu kun $\delta \rightarrow 0$?

Ratkaisu: Karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 + (4 + \delta)\lambda + (4 + 2\delta) = 0$$

josta seuraa, että

$$\lambda = -2 - \frac{1}{2}\delta \pm \sqrt{4 + 2\delta + \frac{1}{4}\delta^2 - 4 - 2\delta} = \begin{cases} -2, \\ -2 - \delta. \end{cases}$$

Yleinen ratkaisu on siten

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-(2+\delta)t}.$$

Kun sijoitetaan alkuarvot saadaan

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_1 + c_2, \\ -1 &= y'(0) = -2c_1 - (2 + \delta)c_2. \end{aligned}$$

Tästä saadaan $c_1 = 1 - c_2$ ja sitten $-1 = -2 + 2c_2 - 2c_2 - \delta c_2$ eli $c_2 = -\frac{1}{\delta}$ ja $c_1 = 1 + \frac{1}{\delta}$. Näin ollen ratkaisu on

$$y(t) = e^{-2t} + \frac{1}{\delta} (e^{-2t} - e^{-(2+\delta)t}).$$

l'Hopitalin säännöllä saadaan

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (e^{-2t} - e^{-(2+\delta)t}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{t e^{-(2+\delta)t}}{1} = t e^{-2t},$$

joten kun $\delta \rightarrow 0$ saadaan ratkaisuksi $e^{-2t} + t e^{-2t}$.

2. Hae differentiaaliyhtälön

$$(a) \quad y''(t) + 10y'(t) + 25y(t) = 0, \quad (b) \quad y''(t) + 10y(t) + 21y(t) = 0,$$

yleinen ratkaisu.

Ratkaisu: (a) Karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0,$$

Tästä saadaan ratkaisuksi,

$$\lambda = -5 \pm \sqrt{25 - 25} = \begin{cases} -5, \\ -5. \end{cases}$$

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 t e^{-5t}.$$

(b) Karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 + 10\lambda + 21 = 0,$$

Tästä saadaan ratkaisuksi,

$$\lambda = -5 \pm \sqrt{25 - 21} = \begin{cases} -3, \\ -7. \end{cases}$$

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-7t}.$$

3. Hae differentiaaliyhtälön $y''(t) + 9y(t) = 81t^2 + 6 \sin(3t)$, yleinen ratkaisu.

Ratkaisu: Homogeenisen yhtälön karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 + 9 = 0,$$

Tästä saadaan ratkaisuksi,

$$\lambda = \pm \sqrt{-9} = \begin{cases} i3, \\ -i3. \end{cases}$$

Homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y_h(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t).$$

Koska $\cos(3t)$ ja $\sin(3t)$ ovat homogeenisen yhtälön ratkaisu pitää yksityisratkaisun yrittää ottaa $y_p(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt \cos(3t) + Et \sin(3t)$. Silloin $y'_p(t) = B + 2Ct + D \cos(3t) - 3Dt \sin(3t) + E \sin(3t) + 3Et \cos(3t)$ ja $y''_p(t) = 2C - 6D \sin(3t) - 9Dt \cos(3t) + 6E \cos(3t) - 9Et \sin(3t)$. Kun nämä lausekkeet sijoitetaan yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} 2C - 6D \sin(3t) - 9Dt \cos(3t) + 6E \cos(3t) - 9Et \sin(3t) \\ + 9A + 9Bt + 9Ct^2 + 9Dt \cos(3t) + 9Et \sin(3t) = 81t^2 + 6 \sin(3t), \end{aligned}$$

josta seuraa, että $2C + 9A = 0$, $B = 0$, $9C = 81$, $-6D = 6$ ja $E = 0$, eli $C = 9$, $A = -2$ ja $D = -1$. Yhtälön yleinen ratkaisu on siten

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) - 2 + 9t^2 - t \cos(3t).$$

4. Määritä yhtälön $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ jokin yksityisratkaisu (kun oletetaan, että $a \neq 0$).

Ratkaisu: Koska 1. kertaluvun yhtälön $y'(t) + ay(t) = f(t)$, $y(0) = 0$ ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa $\int_0^t g(t-s)f(s) \, ds$ missä $g(t) = e^{-t}$ niin yritetään tässäkin tapauksessa käyttää samanlaista integraalia, eli yritetään löytää yksityisratkaisu joka on muotoa

$$y(t) = \int_0^t g(t-s)f(s) \, ds.$$

Derivoimalla saadaan

$$y'(t) = g(0)f(t) + \int_0^t g'(t-s)f(s) \, ds.$$

Koska ei ole yleensä mitään takeita siitä, että f on derivoituva ja koska ratkaisun pitää olla kaksi kertaa derivoituva niin valitaan $g(0) = 0$. Silloin

$$y''(t) = g'(0)f(t) + \int_0^t g''(t-s)f(s) \, ds,$$

ja näiden tulosten perusteella saadaan

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = ag'(0)f(t) + \int_0^t (ag''(t-s) + bg'(t-s) + cg(t-s))f(s) \, ds.$$

Näin ollen y on differentiaaliyhtälön ratkaisu ainakin jos g on homogeenisen differentiaaliyhtälön

$$ag''(t) + bg'(t) + cg(t) = 0,$$

ratkaisu alkuehdoilla $g(0) = 0$ ja $g'(0) = \frac{1}{a}$.

5. Kappale, jonka massa on m kiinnitetään jouseen, jonka jousivakio on k . Jos kappaleen poikkeama lepotilasta on hetkellä t on $y(t)$ niin $my''(t) + ky(t) = 0$. Jos tähän lisätään ”iskuvaimennin” niin yhtälöksi tulee $my''(t) + ay'(t) + ky(t) = 0$ missä $a > 0$. Miten luku a olisi valittava, jos halutaan, että kun kappale on siirretty pois lepotilasta se palaa sinne mahdollisimman nopeasti ilman heilahduksia, eli jos $y(0) > 0$ ja $y'(0) = 0$ niin $y(t) \geq 0$ kaikilla $t \geq 0$ ja $y(t) \rightarrow 0$ ”mahdollisimman nopeasti”?

Ratkaisu: Differentiaaliyhtälön karakteristinen yhtälö on $m\lambda^2 + a\lambda + k = 0$. Jos juuret ovat $\alpha \pm i\beta$ niin ratkaisu on muotoa $c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ ja silloin ei päde $y(t) \geq 0$. (Annetuilla alkuarvoilla saadaan ratkaisuksi $e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ ja tämä on negatiivinen esimerkiksi

kun $\frac{\pi}{2} < \beta t < \pi$.) Jos näin ei ole niin juuret ovat negatiiviset, $\lambda_1 = -\frac{a}{2m} + \sqrt{\frac{a^2 - 4km}{4m^2}}$ ja $\lambda_2 = -\frac{a}{2m} - \sqrt{\frac{a^2 - 4km}{4m^2}}$. Tässä tapauksessa ratkaisuksi tulee

$$e^{\lambda_1 t} + (-\lambda_1) \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Tästä päätellään, että ratkaisu menee ”mahdollisimman nopeasti” kohti 0 jos λ_1 on niin pieni kuin mahdollista. Koska m ja k ovat vakioita riittää tarkastella funktiota

$$h(a) = -a + \sqrt{a^2 - 4mk}, \quad a \geq 2\sqrt{mk}.$$

Koska

$$h'(a) = -1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - 4mk}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4mk}}{\sqrt{a^2 - 4mk}} > 0, \quad a > 2\sqrt{mk}$$

niin $h(a)$ on kasvava funktio ja se se pienimmän arvonsa kun a on mahdollisimman pieni, eli kun $a = 2\sqrt{mk}$.

6. Toisen kertaluvun lineaarisella homogeenisella differentiaaliyhtälöllä

$$x^2(x+1)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

on ratkaisu $y_1(x) = x$ (tarkista!). Etsi toinen (y_1 :stä riippumaton) ratkaisu y_2 yritteellä $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ (eli siis nyt $y_2(x) = v(x)x$). Mikä on yhtälön yleinen ratkaisu?

Ratkaisu: Sijoitetaan $y_1(x) = x$, $y_1'(x) = 1$, $y_1''(x) = 0$ yhtälöön jolloin saadaan $x^2(x+1) \cdot 0 - 2x \cdot 1 + 2x = 0$, eli $y_1(x) = x$ on ratkaisu.

Olkoon $y_2(x) = v(x)y_1(x)$, jolloin $y_2'(x) = v'(x)x + v(x)$ ja $y_2''(x) = v''(x)x + 2v'(x)$. Sijoitetaan nämä alkuperäiseen yhtälöön jolloin saadaan

$$x^2(x+1)(v''(x)x + 2v'(x)) - 2x(v'(x)x + v(x)) + 2v(x)x = 0$$

eli

$$x^3((x+1)v''(x) + 2v'(x)) = 0.$$

Sijoituksella $p = v'$ saadaan 1. kertaluvun separoituva differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned} (x+1)p'(x) + 2p(x) = 0 &\Rightarrow \frac{p'(x)}{p(x)} = -\frac{2}{x+1} \\ &\Rightarrow \int \frac{p'(x)}{p(x)} dx = -\int \frac{2}{x+1} dx \\ &\Rightarrow \ln(|p(x)|) = -2\ln(|x+1|) + C = \ln \frac{1}{(x+1)^2} + C \\ &\Rightarrow |p(x)| = e^C \frac{1}{(x+1)^2} \\ &\Rightarrow v(x) = \int p(x) dx = C_1 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &\quad = -C_1 \frac{1}{x+1} + D. \end{aligned}$$

Otetaan siis $v(x) = \frac{1}{x+1}$, jolloin $y_2(x) = \frac{x}{x+1}$ ja yhtälön yleinen ratkaisu on $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ax + \frac{Bx}{x+1}$.

7. Olkoon $\mathbf{f}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ jatkuvasti derivoituva ja olkoon $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ differentiaaliyhtälösystemin

$$\begin{aligned} X'(t) &= P(X(t), Y(t)), \\ Y'(t) &= Q(X(t), Y(t)), \end{aligned}$$

ratkaisu. Jos $D \subset \mathbb{R}^2$ niin määritellään kun $t > 0$

$$D(t) = \{ (X(t), Y(t)) \mid (X(0), Y(0)) \in D \}.$$

Anna riittävä ehto sille, että $D(t)$:n pinta-ala on sama kuin joukon D pinta-ala.

Ratkaisu: Merkitään $\mathbf{v}(t, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ kun $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix}$. Jos nyt merkitään

$$\mathbf{w}(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{v}(t, \mathbf{u}),$$

niin todetaan ketjusäännön avulla, että

$$\mathbf{w}'(t) = A(t)\mathbf{w}(t),$$

missä $A(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{v}(t, \mathbf{u}))$ ja $\mathbf{w}(0) = I$ (yksikkömatriisi).

Joukon $D(t)$ pinta-ala on tietenkin $\iint_{D(t)} dx dy$. Tässä integraalissa tehdään muuttujan vaihto

$$x = v_1 \left(t, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right), \quad y = v_2 \left(t, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right),$$

(missä siis $u_1 = X(0)$, $u_2 = Y(0)$ ja $\mathbf{v}(t, \mathbf{u}) = (X(t) \ Y(t))^T$ ja differentiaaliyhtälön ratkaisun yksikäsitteyydestä seuraa että tämä kuvaus on bijektio). Nyt todetaan, että

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u_1, u_2)} = \det \mathbf{w}(t).$$

joten

$$\iint_{D(t)} dx dy = \iint_D |\det \mathbf{w}(t)| du_1 du_2.$$

ja pinta-alat ovat ainakin samat jos $\det \mathbf{w}(t) = 1$.

Jos nyt $\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) \\ w_{21}(t) & w_{22}(t) \end{pmatrix}$ ja $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$ niin meillä on yhtälösystemi

$$w'_{11}(t) = a_{11}(t)w_{11}(t) + a_{12}(t)w_{21}(t),$$

$$w'_{12}(t) = a_{11}(t)w_{12}(t) + a_{12}(t)w_{22}(t),$$

$$w'_{21}(t) = a_{21}(t)w_{11}(t) + a_{22}(t)w_{21}(t),$$

$$w'_{22}(t) = a_{21}(t)w_{12}(t) + a_{22}(t)w_{22}(t),$$

ja tästä seuraa, että jos $z(t) = \det \mathbf{w}(t) = w_{11}(t)w_{22}(t) - w_{12}(t)w_{21}(t)$ niin $z(0) = 1$ ja

$$\begin{aligned} z'(t) &= w'_{11}(t)w_{22}(t) + w'_{12}(t)w_{21}(t) - w'_{12}(t)w_{21}(t) - w_{12}(t)w'_{21}(t) \\ &= (a_{11}(t)w_{11}(t) + a_{12}(t)w_{21}(t))w_{22}(t) + w_{11}(t)(a_{21}(t)w_{12}(t) + a_{22}(t)w_{22}(t)) \\ &\quad - (a_{11}(t)w_{12}(t) + a_{12}(t)w_{22}(t))w_{21}(t) - w_{12}(t)(a_{21}(t)w_{11}(t) + a_{22}(t)w_{21}(t)) \\ &= (a_{11}(t) + a_{22}(t))w_{11}(t)w_{22}(t) - w_{12}(t)w_{21}(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t))z(t). \end{aligned}$$

Koska $z(0) = 1$ niin saadaan näin ollen

$$z(t) = e^{\int_0^t (a_{11}(s) + a_{22}(s)) ds}.$$

Tästä nähdään, että $\det \mathbf{w}(t) = z(t) = 1$ ainakin jos $a_{11}(s) + a_{22}(s) = 0$ kaikilla s eli ainakin jos divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{f} = P_x + Q_y = 0$.

8. Hae differentiaaliyhtälösystemin $y'_1(t) = -2y_1(t)^2 - 2y_2(t)$, $y'_2(t) = y_1(t)(y_1(t)y_2(t) - 1)$, asymptootisesti stabiilit (reaaliset) vakioratkaisut.

Ratkaisu: Haetaan ensin vakioratkaisut, eli ratkaistaan yhtälösystemi

$$-2y_1^2 - 2y_2 = 0,$$

$$y_1(y_1y_2 - 1) = 0.$$

Jos $y_1(y_1y_2 - 1) = 0$ niin joko $y_1 = 0$ jolloin ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että $y_2 = 0$ ja vakioratkaisu on $(0, 0)$ tai sitten $y_1y_2 = 1$ jolloin saadaan $-y_1^3 = 1$ kun sijoitetaan $y_2 = -y_1^2$ ensimmäisestä yhtälöstä. Tässä tapauksessa siis $y_1 = -1$ ja $y_2 = -1$ eli toinen vakioratkaisu on $(-1, -1)$. Jos merkitään $f_1(y_1, y_2) = -2y_1^2 - 2y_2$ ja $f_2(y_1, y_2) = y_1(y_1y_2 - 1)$ sekä

$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = (f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2))^T$ niin yhtälösystemi voidaan kirjoittaa muotoon $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$. Olkoon $\mathbf{y}_* = (0, 0)^T$ jolloin

$$\mathbf{f}'(\mathbf{y}_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(0, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(0, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lasketaan tämän matriisin ominaisarvot:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0,$$

josta seuraa, että $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Koska matriisilla on ominaisarvo jonka reaaliosa on positiivinen, niin $(0, 0)$ ei ole asymptoottisesti stabiili vakioratkaisu.

Vastaavasti, olkoon $\mathbf{y}_o = (-1, -1)^T$ jolloin

$$\mathbf{f}'(\mathbf{y}_o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(-1, -1) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(-1, -1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(-1, -1) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(-1, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lasketaan tämän matriisin ominaisarvot:

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

josta seuraa, että $\lambda = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$. Koska matriisilla on ominaisarvo jonka reaaliosa on positiivinen, niin $(-1, -1)$ ei ole asymptoottisesti stabiili vakioratkaisu.

9. Maapallon keskipisteen kautta porataan reikä ja reikään pudotetaan pieni pallo. Oletetaan ettei ilmanvastusta ole vaan palloon vaikuttaa ainoastaan painovoima. Milloin pallo tulee maan pinnalle maapallon toisella puolella? Voit olettaa tunnetuksi, että painovoima maapallon sisäpuolella on verrannollinen etäisyyteen maan keskipisteestä.

Ratkaisu: Jos $y(t)$ on pallon sijainti reiässä hetkellä t niin y toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$my''(t) + ky(t) = 0.$$

Alkuarvoina meillä on $y(0) = R$ (maapallon säde) ja $y'(0) = 0$ (koska pallo pudotetaan eikä heitetä). Karakteristinen yhtälö on $m\lambda^2 + k = 0$ eli $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Yhtälön yleinen ratkaisu on $c_1 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + c_2 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$ ja sijoittamalla alkuehdot saadaan ratkaisuksi

$$y(t) = R \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

Nyt pallo tulee maan pinnalle maapallon toisella puolella kun $\sqrt{\frac{k}{m}}t_0 = \pi$ eli

$$t_0 = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Koska maan pinnalla painovoiman kiihtyvyys on $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ niin $y''(0) = -g = -9.8$ josta seuraa, että $mg = kR$, eli $\frac{m}{k} = \frac{R}{g}$. Näin ollen aika sekunneissa on

$$t_0 = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx \pi \sqrt{\frac{4 \cdot 10^7}{2\pi g}} = 10^3 \sqrt{\frac{20\pi}{9.8}} \approx 2530,$$

eli noin 42 minuutin kuluttua.

10. Määritä yhtälön $y'''(t) + 4y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) = 4t$, yleinen ratkaisu.

Ratkaisu: Homogeenisen yhtälön $y'''(t) + 4y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) = 0$ karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0.$$

Tästä nähdään kokeilemalla, että $\lambda = -1$ on ratkaisu ja koska

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2),$$

muut juuret ovat

$$\lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9 - 4 \cdot 2}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} -1, \\ -2. \end{cases}$$

Koska -1 on kaksoisjuuri niin homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-2t}.$$

Haetaan lopuksi epähomogeenisen yhtälön jokin yksityisratkaisu yrittäällä $y_p(t) = A + Bt$.

Koska $y_p'(t) = B$ ja $y_p''(t) = y_p'''(t) = 0$ saadaan yhtälöksi

$$5B + 2A + 2Bt = 4t,$$

josta seuraa, että $5B + 2A = 0$ ja $B = 2$, ja siten $A = -5$. Yhtälön yleinen ratkaisu on siten $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-2t} - 5 + 2t$.

11. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0,$$

käyttämällä yrittettä $y(x) = x^r$.

Ratkaisu: Jos $y(x) = x^r$ niin $y'(x) = r x^{r-1}$ ja $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$. Kun nämä lausekkeet sijoitetaan yhtälöön saadaan

$$r(r-1)x^{2+r-2} - r x^{1+r-1} + x^r = 0,$$

eli

$$r(r-1) - r + 1 = r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Tästä seuraa, että $r = 1$ on kaksoisjuuri ja että $y(x) = x$ on ratkaisu.

Toinen ratkaisu haetaan muodossa $y(x) = c(x)x$. Silloin $y'(x) = c'(x)x + c(x)$ ja $y''(x) = c''(x)x + 2c'(x)$. Kun nämä lausekkeet sijoitetaan yhtälöön saadaan

$$x^2(c''(x)x + 2c'(x)) - x(c'(x)x + c(x)) + c(x)x = 0$$

eli

$$x^3 c''(x) + x^2 c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c''(x) = -\frac{1}{x} c'(x).$$

Tämä on separoituva differentiaaliyhtälö ja saadaan

$$\int \frac{c''(x)}{c'(x)} dx = - \int \frac{1}{x} = -\ln(x) + k,$$

ja koska $\int \frac{c''(x)}{c'(x)} dx = \ln(|c'(x)|)$ niin

$$c'(x) = \pm e^{-\ln(x)} e^{k_1} = \frac{c_1}{x}.$$

Kun integroidaan, tulos on

$$c(x) = c_1 \ln(x) + c_2.$$

Yhtälön yleinen ratkaisu tulee siten olemaan

$$y(x) = c_1 x \ln(x) + c_2 x.$$

12. Millä λ :n arvoilla reuna-arvoprobleemalla $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ on ratkaisu, joka ei ole identtisesti nolla?

Ratkaisu: Karakteristinen yhtälö on

$$r^2 + \lambda = 0,$$

joten jos $\lambda = -\mu^2$ missä $\mu > 0$ niin $r = \pm \mu$ ja yleinen ratkaisu on

$$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Koska $y(0) = 0$ niin $c_1 + c_2 = 0$ mistä seuraa, että $c_1 = -c_2$ ja koska $y(1) = 0$ niin $c_1 e^{\mu} + c_2 e^{-\mu} = 0$ joten $c_2(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0$. Jos nyt $c_2 = 0$ niin y on identtisesti 0 ja muuten saadaan $e^{\mu} = e^{-\mu}$. Mutta $e^{\mu} > e^{-\mu}$ kun $\mu > 0$ joten ei ole mahdollista, että $\lambda < 0$.

Jos $\lambda = 0$ niin yleinen ratkaisu on $y(x) = c_1 + c_2 x$ ja ehdosta $y(0) = 0$ seuraa $c_1 = 0$ ja silloin ehdosta $y(1) = 0$ saadaan $c_2 = 0$ joten tässäkin tapauksessa nolla-ratkaisu on ainoa ratkaisu.

Jos $\lambda > 0$ niin karakteristisella yhtälöllä on ratkaisut $r = \pm i\sqrt{\lambda}$ ja yleinen ratkaisu on

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Ehdosta $y(0) = 0$ seuraa $c_1 = 0$ ja ehdosta $y(1) = 0$ seuraa $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ ja koska $c_2 \neq 0$ (muuten saadaan triviaali ratkaisu) niin $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ eli $\sqrt{\lambda} = n\pi$ ja $\lambda = (n\pi)^2$, missä $n = 1, 2, 3, \dots$ (Jos $n = 0$ niin $\lambda = 0$ ja meillä on taas nolla-ratkaisu.) Näin ollen ainoat mahdolliset λ :n arvot ovat $\lambda = (n\pi)^2$ missä $n = 1, 2, \dots$
