5 Tutkateoriaa

Tutka voidaan yksinkertaisesti luonnehtia suunnattavaksi antenniksi tai antennijärjestelmäksi, jolla voidaan lähettää ja vastaanottaa sähkömagneettista säteilyä. Mikäli sama antenni sekä lähettää että vastaanottaa signaaleja, sanotaan tutkaa *monostaattiseksi*, kun taas useamman antennin järjestelmiä, joissa yksi antenni lähettää signaalia ja toisaalla oleva antenni vastaanottaasanotaan *bistaattiseksi*. Mikroaaltoalueessa toimiva tutka on signaalinkäsittelyn ja käyttötarkoituksensa kannalta läheistä sukua akustisia aaltoja käyttävään luotauslaitteelle *sonarille*, jota käytetään mm. merenpohjan kartoitukseen. Tämän luvun materiaali soveltuu osittain sekä tutka– että sonarsignaalin käsittelyyn.

5.1 Tutkasignaali

Aloitetaan joistakin tutkasignaaliin liittyvistä peruskäsitteistä. Tarkastellaan tutkasignaalia, joka on jokin ajasta riippuva reaaliarvoinen funktio $u = u(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Signaalilla tarkoitetaan tässä tutkan antenniin tulevaa mikroaaltoa, joka antennin kautta säteilee ympäristöön. Voimme ajatella signaalin kuvaavan esimerkiksi jännitettä koaksiaalikaapelissa. Oletamme, että u on integroituva sekä neliöintegroituva, s.o.

$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt < \infty, \quad \|u\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt < \infty,$$

eli lyhyesti $u \in L^1 \cap L^2$. Tutkasignaalin *spektri* $\tilde{u}$ määritellään tässä funktion u Fourier–käänteismuunnoksen avulla,

$$\tilde{u}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}u(t)dt.$$

Funktio u saadaan siten rekonstruoitua spektristään Fourier–muunnoksella,

$$u(t) = \mathcal{F}\tilde{u}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\tilde{u}(\omega)d\omega,$$

kuten Liitteessä 2 on esitetty.

Signaali oletetaan siis reaaliarvoiseksi, mikä voidaan kirjoittaa spektrin avulla muodossa

$$\tilde{u}(-\omega) = \overline{\tilde{u}(\omega)}.$$

Näin ollen reaaliselle signaalille pätee

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\tilde{u}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} (e^{-i\omega t}\tilde{u}(\omega) + e^{i\omega t}\overline{\tilde{u}(\omega)})d\omega \\ &= \mathrm{Re}\, s(t), \end{aligned}$$

missä

$$s(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-i\omega t}\tilde{u}(\omega)d\omega$$

on tutkan *kompleksifioitu* signaali. Signaalin s spektri on siten

$$\tilde{s}(\omega) = 2\theta(\omega)\tilde{u}(\omega),$$

missä θ on Heavisiden funktio, s.o. $\theta(\omega) = 1$, kun $\omega > 0$ ja muulloin $\theta(\omega) = 0$. Jatkossa tutkasignaalista puhuttaessa viitataan yleensä tähän kompleksifioituun suureeseen. Kompleksifiodun signaalin määritelmästä seuraa, että s on niinikään neliöintegroituva funktio: Parsevalin kaavasta (ks. Liite 2) seuraa, että

$$\|s\|_2^2 = 2\pi\|\tilde{s}\|_2^2 = 4\pi\int_0^\infty |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi\|\tilde{u}\|_2^2 = \|u\|_2^2 < \infty.$$

Normitetaan signaali siten että

$$\|s\|_2 = 1.$$

Tämä luku on verrannollinen signaalin kokonaisenergiaan.
Määritellään signaalin *kantotaajuus* ω_0 kaavalla

$$\omega_0 = \int_{-\infty}^\infty \omega|\tilde{s}(\omega)|^2 d\omega,$$

missä integraali oletetaan äärelliseksi. Kantotaajuus on siis signaalin spektrin eräänlainen painopiste, jonka ympärille spektrin voidaan ajatella olevan keskittynyt. Kirjoitetaan signaali s nyt muotoon

$$s(t) = e^{-i\omega_0 t}\sigma(t),$$

missä σ on signaalin *kompleksinen verhofunktio* kantotaajuuden ω_0 suhteen. Nyt

$$\tilde{s}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega - \omega_0).$$

Kantotaajuuden määritelmästä seuraa, että σ on tietyssä mielessä signaalin s hitaasti varioiva osa, sillä sen spektri on keskittynyt nollataajuuden ympäristöön. Pätee nimittäin

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \omega|\tilde{\sigma}(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^\infty (\omega-\omega_0)|\tilde{\sigma}(\omega-\omega_0)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^\infty \omega|\tilde{s}(\omega)|^2 d\omega - \omega_0\|s\|_2^2 = 0.\end{aligned}$$

Kirjoitetaan σ polaarimuodossa,

$$\sigma(t) = e^{-i\varphi(t)}|\sigma(t)|,$$

eli

$$s(t) = e^{-i(\omega_0 t + \varphi(t))} |\sigma(t)|.$$

Jos oletetaan, että vaihefunktio $\varphi(t)$ on identtisesti nolla, niin signaali kantaa informaatiota amplitudifunktiossaan $|\sigma(t)|$. Tällaista signaalia sanotaan AM–signaaliksi (*Amplitude Modulated*). Jos taas amplitudifunktio on vakio, voidaan signaalilla välittää informaatiota vaihefunktiota varioimalla. Tällaista signaalia sanotaan FM–signaaliksi (*Frequency Modulated*). Tutkan *hetkellinen taajuus* ω_i määritellään funktiona

$$\omega_i(t) = \omega_0 + \varphi'(t).$$

Hetkellinen taajuus on siis oskillaation linearisaation kerroin: kun $|t - t_0|$ on pieni, niin

$$\omega_0 t + \varphi(t) \approx \omega_0 t + \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0) = \omega_i(t_0)t + \varphi(t_0) - \varphi'(t_0)t_0.$$

Voidaan siis ajatella, että $\omega_i(t_0)$ kuvaa approksimatiivisesti oskillaatiotaajuutta hetken t_0 ympäristössä.
Näiden perustarkastelujen jälkeen siirrytään tutkan kaikusignaalin tulkintaan ja erilaisiin sovelluksiin.

5.2 Doppler–tutka

Tässä luvussa tarkastellaan sellaisen tutkan toimintaperiaatetta, jolla pyritään samanaikaisesti paikantamaan kohde sekä määrittämään sen nopeus tutkaan nähden. Nopeuden määrittäminen tapahtuu kaikusignaalin *Doppler–siirtymän* perusteella. Doppler–tutkan toiminnan ymmärtäminen antaa pohjan myös monimutkaisempien tutkajärjestelmien käsittelylle.
Aloitetaan pelkistetystä tapauksesta: Oletetaan, että monostaattisella tutkalla valaistaan yhtä liikkuvaa objektia, jonka etäisyys sekä radiaalinen nopeus halutaan saada selville. Radiaalisella nopeudella tarkoitetaan tässä nopeuskomponenttia suoraan tutkaa kohti tai siitä poispäin. Merkitään kohteen vakioksi oletettua radiaalista nopeutta v:llä ja etäisyyttä hetkellä $t = 0$ R_0:lla. Tällöin etäisyys hetkellä t on

$$R(t) = R_0 + vt.$$

Oletetaan, että kohde heijastaa osan lähetetystä signaalista takaisin antenniin, ja vieläpä niin, että heijastuneen aallon amplitudi on taajuudesta riippumaton. Suurilla taajuuksilla tämä on varsin tarkka oletus. Tällöin vastaanotettu signaali on muotoa

$$e(t) = Cs(t - \tau), \quad \tau = \tau(R_0, v),$$

missä heijastuksen amplitudi C on kohteen ominaisuuksita riippuva vakio ja τ on viive, jonka muodon seuraavaksi selvitämme. Hetkellä t vastaanotettu signaali on lähtenyt tutkasta hetkellä $t-\tau$, ja koska oletamme signaalin etenevän vakionopeudella c, on se siis heijastunut kohteesta hetkellä $t-\tau/2$. Siis kohde oli heijasushetkellä etäisyydellä $c\tau/2$ tutkasta, eli pätee yhtälö

$$\frac{c\tau}{2} = R(t-\frac{\tau}{2}) = R_0 + (t-\frac{\tau}{2})v,$$

mistä ratkaisemme τ:lle arvon

$$\tau = 2\frac{v}{c+v}t + \frac{R_0}{c+v}.$$

Siis kaikusignaali on muotoa

$$e(t) = Cs\left(\frac{c-v}{c+v}t - 2\frac{R_0}{c+v}\right) = Cs(at-b). \tag{1}$$

Havaitsemme, että kaikusignaalin parametrit a ja b antavat yksinkertaisella laskulla haluamamme informaation, eli voidaan määritellä kuvaus

$$(a,b) \mapsto (R_0, v).$$

Tietyssä mielessä koko tutkasignaalianalyysissä on kyse vain siitä, miten parametrit a ja b effektiivisesti voidaan invertoida kaikusignaalista. Luonnollisesti todellinen tilanne on monimutkaisempi, kun sirottava kohde muodostuu useista tutkan suhteen liikkeessä olevista kohteista. Tulee myös huomata, että kaiun amplitudi C riippuu kohteen etäisyydestä. Tämä riippuvuus voidaan kuitenkin yhtä kohdetta tarkasteltaessa skaalata kaikusignaalista pois esimerkiksi jakamalla e L^2–normillaan.

Oletetaan, että valaistavan kohteen radiaalinen nopeus on huomattavasti signaalinopeutta pienempi, eli $|v| \ll c$, kuten yleensä on tutkasovelluksissa asianlaita. Sonarin eli akustisen kaikuluotaimen tapauksessa tämä approksimaatio ei enää ole yhtä luotettava. Kirjoitetaan

$$\eta = \frac{v}{c} \ll 1,$$

ja approksimoidaan parameteria a η:n suhteen lasketuilla ensimmäisen kertaluvun Taylorin polynomeilla. Siis

$$a = \frac{c-v}{c+v} = \frac{1-\eta}{1+\eta} \approx 1 - 2\eta.$$

Vastaavasti kirjoitetaan

$$b = 2\frac{R_0}{c+v} \approx 2\frac{R_0}{c}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} s(at-b) &= \sigma(at-b)e^{-i\omega_0(at-b)} \approx \sigma((1-2\eta)t - 2\frac{R_0}{c})e^{-i\omega_0(t-2R_0/c)}e^{i2\omega_0\eta t} \\ &\approx \sigma(t-2\frac{R_0}{c})e^{-i\omega_0(t-2R_0/c)}e^{i2\omega_0\eta t} \\ &= s(t-2\frac{R_0}{c})e^{i2\omega_0\eta t}. \end{aligned}$$

Havaitaan, että kohteen etäisyys vaikuttaa signaalin viiveeseen, kun taas nopeus aiheuttaa Doppler–siirtymän kantotaajuuteen.
Tehokas ja teknisesti toteutettavissa oleva tapa estimoida viive ja Doppler–siirtymä kaikusignaalista on laskea kaikusignaalin ja sopivan vertailusignaalin välinen korrelaatio. Merkitään

$$x_0 = 2\frac{R_0}{c}, \quad y_0 = 2\omega_0\eta,$$

jolloin kirjoittamalla kaikusignaalin riippuvuus x_0:sta ja y_0:sta eksplisiittisesti näkyviin pätee

$$e(t,x_0,y_0) = e^{-i\omega_0(t-x_0)}\sigma(t-x_0)e^{iy_0t}.$$

Tässä kaavassa on yksinkertaisuuden vuoksi vakio C pudotettu pois. Ideana on verrata tätä funktiota funktioon $e(t,x,y)$, missä $x > 0$ ja $y > 0$ ovat mielivaltaisia, laskemalla integraali

$$I(x,y) = |\int_{-\infty}^{\infty} e(t,x_0,y_0)\overline{e(t,x,y)}dt|^2.$$

Todetaan Schwarzin epäyhtälöä käyttäen (ks. Liite 2), että

$$\begin{aligned} I(x,y) &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |e(t,x_0,y_0)||\overline{e(t,x,y)}|dt\right)^2 \\ &\le \|e(\,\cdot\,,x_0,y_0)\|_2^2\|e(\,\cdot\,,x,y)\|_2^2 = 1, \end{aligned}$$

ja toisaalta että

$$I(x_0,y_0) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |e(t,x_0,y_0)|^2dt\right)^2 = 1.$$

Funktiolla $I(x,y)$ on siis maksimi pisteessä $(x,y) = (x_0,y_0)$. Voidaan siis ajatella, että jos $I(x,y)$ esitetään graafisesti topografiamuodossa, piste (x_0,y_0) löytyy kuvan maksimipisteiden joukosta. Jos tutkasignaali σ on hyvin valittu, on kyseinen maksimipiste (x_0,y_0) myös globaali maksimipiste, ja tehtävä on näin ratkaistu.
Tutkitaan seuraavaksi, miten Doppler–tutkan resoluutio riippuu valitusta kaikusignaalista. Sijoittamalla e:n lauseke integraaliin nähdään, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(t,x_0,y_0)\overline{e(t,x,y)}dt = e^{i\omega_0(x_0-x)}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t-x_0)\overline{\sigma(t-x)}e^{i(y_0-y)t}dt.$$

Tehdään muutujanvaihto

$$\xi = t - \frac{x_0 + x}{2},$$

jolloin integraali saa muodon

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t - x_0)\overline{\sigma(t - x)}e^{i(y_0-y)t}dt$$

$$= e^{i(y_0-y)(x_0+x)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\left(\xi - \frac{x_0 - x}{2}\right) \overline{\sigma\left(\xi + \frac{x_0 - x}{2}\right)} e^{i(y-y_0)\xi} d\xi.$$

Kirjoitetaan

$$I(x, y) = |A(x_0 - x, y_0 - y)|^2,$$

missä A on tutkan *ambiguiteettifunktio*, joka määritellään integraalina

$$A(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\left(\xi - \frac{x}{2}\right) \overline{\sigma\left(\xi + \frac{x}{2}\right)} e^{iy\xi} d\xi.$$

Funktio A kuvastaa verhofunktiota σ vastaavalla signaalilla tehdyn luotauksen resoluutiota (x, y)–tasossa. Mitä kapeampi A on, sen luotettavampi arvio tutkalla saadaan.
Ennen valaisevia esimerkkejä todetaan eräs ambiguiteettifunktioiden ominaisuus, joka tietyllä tavalla antaa periaatteellisen rajoituksen tutkan kuvaustarkkuudelle. Todistetaan tutkan epätarkkuusrelaatio, joka on sukua kvanttimekaniikasta tutulle Heisenbergin epätarkkuusperiaatteelle. Tämän periaatteen mukaanhan konjugoituja suureita kuten paikkaa ja impulssimomenttia tai energiaa ja aikaa ei voida mitata samanaikaisesti mielivaltaisen tarkasti.
Rajataan tutkasignaalien luokkaa hieman, ja määritellään signaaliluokka

$$W = \{u \in L^1 \cap L^2 \cap L^\infty \mid \|u\|_2 = 1\}.$$

Lause 5.1 *Olkoon $\sigma \in W$ tutkasignaalin kompleksinen modulaatio ja A vastaava ambiguiteettifunktio. Tällöin $A \in L^2(\mathbb{R}^2)$, ja*

$$|A(x, y)| \leq 1, \quad A(0, 0) = 1, \quad \text{ja} \quad \|A\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Todistus: Väitetyt pisteittäiset arviot A:lle ovat samat kuin aiemmin osoitetut arviot funktiolle $I(x, y)$. Normiarvion näyttämiseksi tehdään muuttujanvaihto $t = \xi - x/2$ A:n määritelmään, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\left(\xi - \frac{x}{2}\right) \overline{\sigma\left(\xi + \frac{x}{2}\right)} e^{iy\xi} d\xi \\ &= e^{ixy/2} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\overline{\sigma(t + x)}e^{ity}dt \\ &= e^{ixy/2}\mathcal{F}^{-1}S_x(y), \end{aligned}$$

missä

$$S_x(t) = \sigma(t)\overline{\sigma(t+x)} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Siten Parsevalin kaavaa soveltaen saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |A(x,y)|^2 dy &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}^{-1} S_x(y)|^2 dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 |u(t+x)|^2 dt.\end{aligned}$$

Siis kun integroidaan saatu yhtälö x:n suhteen, saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |A(x,y)|^2 dx dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t+x)|^2 dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \|u\|^4 = \frac{1}{2\pi},\end{aligned}$$

mikä on juuri väitteen mukainen yhtälö.

□

Lause sanoo siis, että riippumatta tutkasignaalin muodon valinnasta ambiguiteetti eli moniselitteisyys pysyy vakiona. Jos tutkasignaalia muuttamalla A saadaan pienenemään jossain, kasvaa se vääjäämättä jossain muualla.
Seuraavissa esimerkeissä on laskettu joidenkin tyypillisten tutkasignaalien ambiguiteettifunktioita.

Esimerkki: Otetaan mahdollisimman yksinkertainen AM–tutkapulssi, *laatikkopulssi*, joka määritellään

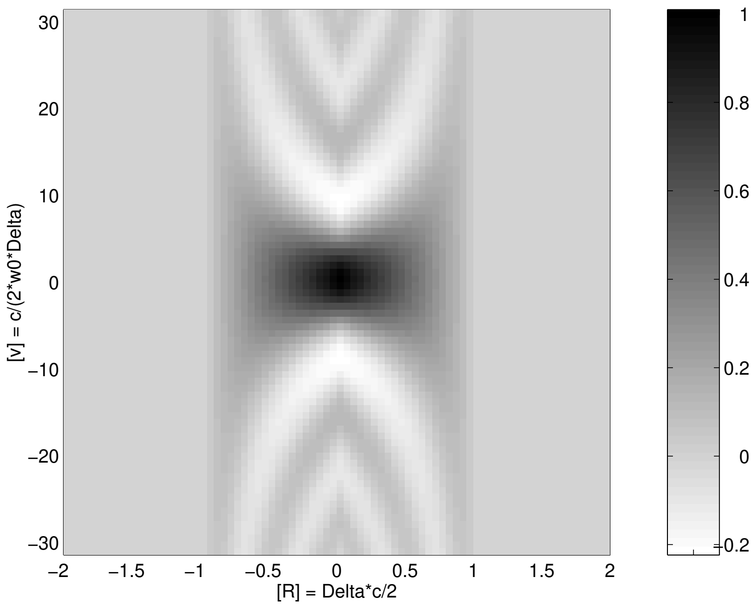
$$\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \chi_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta}}, & |t| < \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & |t| \geq \frac{\Delta}{2}, \end{cases}$$

missä Δ on pulssin kesto. Pienellä päättelyllä nähdään, että tällöin

$$\sigma\left(\xi - \frac{x}{2}\right)\overline{\sigma\left(\xi + \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\Delta}, \text{ kun } -\frac{\Delta - |x|}{2} < \xi < \frac{\Delta - |x|}{2},$$

ja tulo on nolla muulloin. Erityisesti $A(x,y) = 0$, jos $|x| \geq \Delta$, jolloin siirretyt pulssit eivät osu lainkaan toistensa päälle, ja kun $|x| < \Delta$, on

$$\begin{aligned}A(x,y) &= \frac{1}{\Delta} \int_{-(\Delta-|x|)/2}^{(\Delta-|x|)/2} e^{iy\xi} d\xi = \frac{2}{\Delta y} \sin(\Delta - |x|)\frac{y}{2} \\ &= \left(1 - \frac{|x|}{\Delta}\right) \operatorname{sinc}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{\Delta}\right)\Delta y,\end{aligned}$$



Kuva 1. Laatikkopulssin ambiguiteettifunktio. Vaaka–akselina on etäisyys, pystyakselina radiaalinen nopeus, ja yksiköt on skaalattu tutkan parametreilla.

missä $\mathrm{sinc} t = \sin t/t$.
Saadusta kaavasta voidaan päätellä, miten tutkan parametrit vaikuttavat etäisyys– ja Doppler–resoluutioon. Parametrin x resoluutio on samaa luokkaa kuin funktion A leveys x–suunnassa, mistä saadaan etäisyysresoluutiolle arvio

$$R_{\mathrm{res}} \sim \Delta c,$$

kun taas resoluutio y–suunnassa antaa nopeusresoluutiolle arvion

$$v_{\mathrm{res}} \sim \frac{\pi c}{\omega_0 \Delta}.$$

Kuva 1 esittää ambiguiteettifunktiota A harmaasävyesityksenä.

Esimerkki: Tarkastellaan seuraavaksi taajuusmoduloitua pulssia, josta käytetään englanninkielellä nimitystä *chirp pulse*. Kyseessä on signaali, jonka reaalinen versio on muotoa

$$u(t) = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \cos(\omega_0 t + \frac{B}{2\Delta} t^2) \chi_\Delta(t),$$

missä B on pulssin *effektiivinen kaistanleveys*, ja χ_Δ on kuten edellisessä esimerkissä. Välittömästi todetaan, että signaalin u kompleksifikaatio on

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{-i(\omega_0 t + Bt^2/(2\Delta))} \chi_\Delta(t) = e^{-i\omega_0 t} \sigma(t), \tag{2}$$

ja hetkellinen taajuus siis lineaarisesti kasvava funktio,

$$\omega_i(t) = \omega_0 + \frac{B}{\Delta}t, \quad -\frac{\Delta}{2} \le t \le \frac{\Delta}{2},$$

mikä selittää effektiivisen kaistanleveyden merkityksen. Nimitys "chirp" johtuu siitä, että ääneksi muunnettuna signaali kuulostaa nousevalta vihellykseltä. Tutkitaan aluksi B:n suhdetta todelliseen kaistanleveyteen. Siksi lasketaan tämän signaalin spektri. Sijoittamalla funktio spektrin määritelmään saadaan

$$\tilde{s}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} s(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{i(\omega-\omega_0)t - iB/(2\Delta)t^2} dt.$$

Funktio $\tilde{\sigma}$ voidaan ilmaista ns. *Fresnelin integraalien* avulla. Nimittäin

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{i\omega t - iB/(2\Delta)t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{i(\Delta/(2B))\omega^2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-i(B/(2\Delta))(t-\Delta\omega/B)^2} dt,\end{aligned}$$

mistä edelleen muutujanvaihdolla $\eta = \sqrt{B/(2\Delta)}(t - \Delta\omega/B)$ seuraa

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \left(\frac{2}{B}\right)^{1/2} e^{i(\Delta/(2B))\omega^2} \int_{-z_+}^{z_-} e^{-i\eta^2} d\eta. \tag{3}$$

Edellä esiintyvät integroimisrajat $z_\pm$ määritellään kaavoilla

$$z_\pm = \left(\frac{B\Delta}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\omega}{B}\right).$$

Määritellään Fresnelin integraaalit $C(z)$ ja $S(z)$ kaavoilla

$$C(z) = \int_0^z \cos\eta^2 d\eta,$$

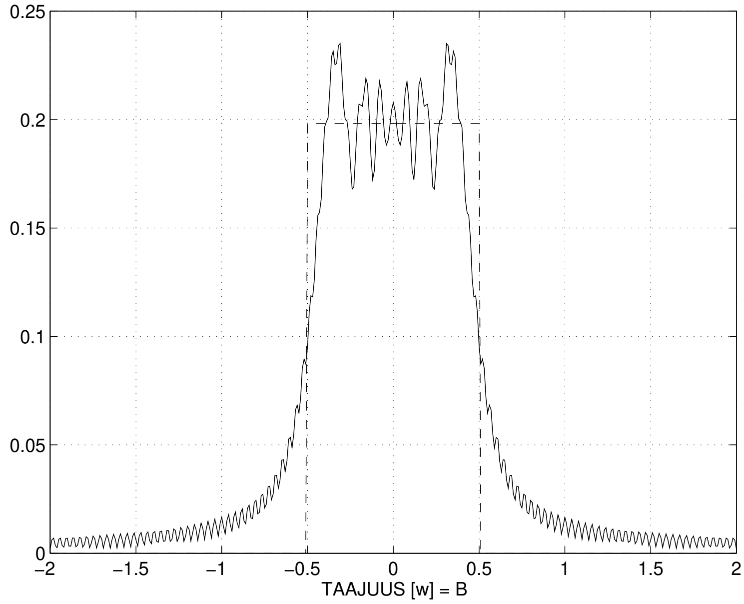
$$S(z) = \int_0^z \sin\eta^2 d\eta.$$

Näillä merkinnöillä signaalin σ spektri saa muodon

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \left(\frac{2}{B}\right)^{1/2} e^{i(\Delta/2B)\omega^2)} (C(z_+) + C(z_-) - i(S(z_+) + S(z_-))).$$

Mikäli pulssin kestoajan ja effektiivisen kaistavälin tulo ΔB valitaan suureksi, voidaan $\tilde{\sigma}$:n määräävä nopeasti oskilloiva integraali (3) approksimoida varsin tarkasti käyttämällä ns. *stationaarisen vaiheen periaatetta.* Tämä periaate, jota emme todista tässä, sanoo, että jos $\lambda \in \mathbb{R}$ on suuri, niin pätee approksimaatio

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(t)} f(t)dt \approx \left(\frac{2\pi}{\lambda|\varphi''(c)|}\right)^{1/2} e^{i\lambda\varphi(c) + i\pi \mathrm{sign}\,\varphi''(c)/4},$$



Kuva 2. Taajuusmoduloidun pulssin spektrin moduli, kun $B\Delta = 160$. Spektri on siirretty nollataajuuden ympärille, ja taajuus on esitetty yksikköinä effektiivinen kaistanleveys B. Katkoviivalla on piirretty vastaava funktio laskettuna stationaarisen vaiheen periaatetta käyttäen.

missä c on vaihefunktion φ ainut stationaarinen piste, s.o. ainut piste, jossa

$$\varphi'(c) = 0, \quad \varphi''(c) \neq 0.$$

Kirjoitetaan nyt

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \sqrt{\Delta} e^{i(\Delta/(2B))\omega^2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i(B\Delta/2)(t-\omega/B)^2} dt.$$

Suuren parametrin asemassa on tässä tulo ΔB, ja vaihefunktiona $\varphi(t) = (t - \omega/B)^2$, jonka ainut stationaarinen piste on $t = \omega/B$. Siten

$$\tilde{\sigma}(\omega) \approx i \left(\frac{2\pi}{B}\right)^{1/2} e^{i(\Delta/2B)\omega^2} \chi\left(\frac{\omega}{B}\right),$$

missä χ on välin $[-1/2, 1/2]$ karakteristinen funktio.
Kuvassa 2 on esitetty taajuusmoduloidun pulssin spektrin moduli, joka on laskettu numeerisesti Fresnelin integraaleja käyttäen, sekä stationaarisen vaiheen approksimaatio. Spektriä laskettaessa on valittu pulssin keston ja kaistaleveyden tuloksi $\Delta B = 160$. Todellisissa tutkasignaaleissa mainittu tulo saattaa olla huomattavasti suurempikin, riippuen hieman tutkan käyttötarkoituksesta.

Lasketaan nyt signaalia vastaava ambiguiteettifunktio. Kuten edellisessä esimerkissä todetaan taas, että tulo $\sigma(\xi - x/2)\overline{\sigma(\xi + x/2)}$ on nollasta poikkeava vain, mikäli ξ on välillä $-(\Delta - |x|)/2 < \xi < (\Delta - |x|)/2$. Näin ollen $A(x, y) = 0$, kun $|x| \geq \Delta$. Lasketaan tulon $\sigma(\xi - x/2)\overline{\sigma(\xi + x/2)}$ eksponentissa oleva vaihefunktio, joka on

$$-i\frac{B}{2\Delta}\left(\xi - \frac{x}{2}\right)^2 + i\frac{B}{2\Delta}\left(\xi + \frac{x}{2}\right)^2 = i\frac{B}{\Delta}\xi x,$$

joten ambiguiteettifunktiolle saadaan lauseke

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\left(\xi - \frac{x}{2}\right)\overline{\sigma\left(\xi + \frac{x}{2}\right)}e^{iy\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{\Delta}\int_{-(\Delta-|x|)/2}^{(\Delta-|x|)/2} e^{i\xi(y+Bx/\Delta)}d\xi \\ &= \frac{2}{\Delta y + Bx}\sin\frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{\Delta}\right)(\Delta y + Bx) \\ &= \left(1 - \frac{|x|}{\Delta}\right)\text{sinc}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{\Delta}\right)(\Delta y + Bx). \end{aligned}$$

Tästä lausekkeesta voidaan jälleen arvioida signaalin resoluutio, Asettamalla $x = 0$ nähdään, että y–suunnassa resoluutio on samaa luokkaa kuin laatikkopulssia käytettäessä, eli

$$v_{\text{res}} \sim \frac{c}{\omega_0\Delta}.$$

Asettamalla $y = 0$ saadaan resoluutioksi x–suunnassa pienempi luvuista Δ ja π/B, eli voidaan kirjoittaa karkea arvio

$$R_{\text{res}} \sim \min(\Delta c, \frac{\pi c}{B}).$$

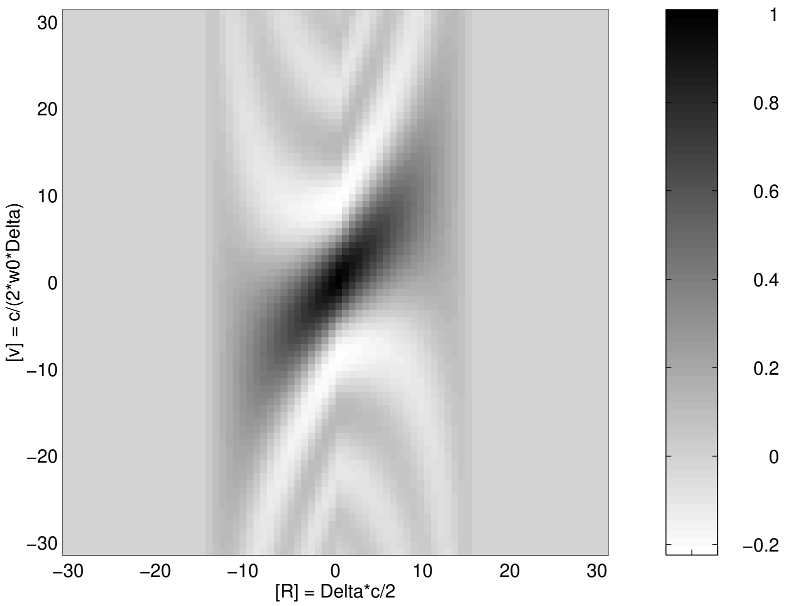
Kuvassa 3 on esitetty mainittu ambiguiteettifunktio. Havaitaan, että kasvattamalla Δ:aa saadaan nopeusresoluutio paranemaan, ja kasvattamalla B:tä paranee etäisyysresoluutio. Tämä samanaikainen resoluutioiden paraneminen on kuitenkin näennäistä, sillä ambiguiteettifunktio venyy tällöin diagonaalisuunnassa, ja samanaikainen parametrien tarkka estimointi ei onnistu.

Harjoitustehtäviä:

1. Laske Gaussista verhofunktiota

   $$\sigma(t) = Ce^{-t^2/\Delta^2}$$

   vastaava ambiguiteettifunktio. Miten vakio C on valittava, jotta $\|\sigma\|_2 = 1$. Arvioi etäisyys– ja nopeusresoluutio tälle signaalille. Miten Δ ja ω_0 on valittava, jotta resoluutio nopeus– ja etäisyyssuunnissa olisivat yhtä suuret?



Kuva 3. Chirppipulssin ambiguiteettifunktio. Effektiivinen kaistanväli B on tässä valittu siten, että $B\Delta \approx 16$.

2. Osoita, että edellisen tehtävän Gaussisen pulssin ambiguiteettifunktion tasa–arvokäyrä $A(x, y) = c$ =vakio sulkee sisäänsä alueen, jonka pinta–ala on Δ:sta riippumaton.

3. Laske kääntyvän pulssin

$$\sigma(t) = \begin{cases} -\Delta^{-1/2}, & -\Delta/2 < t < 0, \\ \Delta^{-1/2}, & 0 \le t < \Delta/2, \\ 0, & |t| \ge \Delta/2 \end{cases}$$

ambiguiteettifunktio sekä arviot resoluutioille.

4. Laske laatikkopulssin ja kääntyvä pulssin spektrit.

5.3 Pulssijonon resoluutio

Edellisessä luvussa käsiteltiin yhdellä yksittäisellä pulssilla operoivia Doppler–tutkia. Käytännössä on usein kuitenkin tarkoituksenmukaista luodata tutkittavaa kohdetta pulssijonolla yhden pulssin sijaan. Tässä luvussa oletetaan edelleen, että luodattava kohde on yksinkertainen tasaisella nopeudella liikkuva heijastava kohde. Myöhemmin tarkastellaan realistisempaa luotauskohdetta. Osoittautuu, että tässä luvussa kehitellyt ideat ovat jälleen suuntaa-antavia.
Oletetaan, että signaali koostuu identtisistä säännöllisin välein toistuvista pulsseista. Olkoon ω_0 kunkin pulssin kantotaajuus ja $\sigma \in W$ yksittäisen pulssin

kompleksinen verhofunktio, jonka kesto olkoon Δ. Oletetaan, että σ on keskittynyt nollan ympärille, s.o. $\sigma(t) = 0$, jos $|t| > \Delta/2$. Merkitään A:lla tämän pulssin ambiguiteettifunktiota. Tarkastellaan N:n pulssin pulssijonoa. Pulssijonon kompleksinen verhokäyrä olkoon

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma(t - nT),$$

missä $T > \Delta$ on pulssin toistoväli. Voimme nyt määritellä pulssijonon ambiguiteettifunktion analogisesti yksittäisen pulssin ambiguiteettifunktion kanssa asettamalla

$$A_N(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} S_N\left(\xi - \frac{x}{2}\right) \overline{S_N\left(\xi + \frac{x}{2}\right)} e^{i\xi y} d\xi.$$

Todistamme seuraavan lauseen:

Lause 5.2 *Funktio A_N voidaan kirjoittaa muotoon*

$$A_N(x, y) = e^{i(N-1)Ty/2} \sum_{k=-N+1}^{N-1} A(x - kT, y) \frac{\sin \frac{1}{2}(N - |k|)Ty}{\sin \frac{1}{2}Ty}.$$

Todistus: Suoraan määritelmästä seuraa, että

$$A_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\left(\xi - \frac{x}{2} - kT\right) \overline{\sigma\left(\xi + \frac{x}{2} - nT\right)} e^{iy\xi} d\xi.$$

Tehdään muuttujanvaihto määrittelemällä $\eta = \xi - (k + n)T/2$, jolloin A_N saa muodon

$$\begin{aligned}
A_N(x, y) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k+n)Ty/2} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\left(\eta - \frac{1}{2}(x + (k - n)T)\right) \\
&\qquad \overline{\sigma\left(\eta + \frac{1}{2}(x + (k - n)T)\right)} e^{iy\xi} d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k+n)Ty/2} A(x + (k - n)T, y) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,n}.
\end{aligned}$$

Luvut $a_{k,n}$ ovat $N \times N$–matriisin elementtejä, jotka summataan seuraavassa järjestykseesä: Lasketaan ensin lävistäjäelementit yhteen, sitten kunkin sivulävistäjän elementit, ja lopuksi lasketaan näin saadut termit yhteen. Siis

$$A_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{k,k} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-k-1} (a_{k+n,n} + a_{n,k+n}).$$

Lävistäjäelementeistä saamme

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} a_{k,k} &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{ikTy} A(x,y) = A(x,y)\frac{1-e^{iNTy}}{1-e^{iTy}} \\ &= e^{i(N-1)Ty/2} A(x,y)\frac{\sin\frac{1}{2}NTy}{\sin\frac{1}{2}Ty}.\end{aligned}$$

Samaan tapaan lasketaan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-k-1} a_{k+n,n} &= \sum_{n=0}^{N-k-1} e^{i(2n+k)Ty/2} A(x+kT,y) \\ &= e^{i(N-1)Ty/2} A(x+kT,y)\frac{\sin\frac{1}{2}(N-k)Ty}{\sin\frac{1}{2}Ty},\end{aligned}$$

ja vastaavast

$$\sum_{n=0}^{N-k-1} a_{n,k+n} = e^{i(N-1)Ty/2} A(x-kT,y)\frac{\sin\frac{1}{2}(N-k)Ty}{\sin\frac{1}{2}Ty}.$$

Siis yhteenlaskemalla

$$A_N(x,y) = e^{i(N-1)Ty/2} \sum_{k=-N+1}^{N-1} A(x-kT,y)\frac{\sin\frac{1}{2}(N-|k|)Ty}{\sin\frac{1}{2}Ty},$$

kuten väitettiin. □

Selvästikin resoluutio paranee Doppler–suunnassa, kun korvataan yksi pulssi useammalla. Tätä havaintoa käytetään effektiivisesti ns. SAR–tutkan synteesiperiaatteessa, jota käsitellään myöhemmin.

Kuvassa 4 on piirretty kolmen laatikkopulssin syntetisoitu ambiguiteettifunktio.

5.4 Taajuusmoduloitu tutka

Esitellään seuraavaksi tutkatyyppi, joka soveltuu hyvin liikkumattomien tai lähes liikkumattomien kohteiden luotaukseen. Kuvailtavalla periaatteella on rakennettu mm. suotutkia ja kasvillisuuden arviointiin käytettäviä helikopteritutkia.

Olkoon siis s jälleen tutkan kompleksifioitu signaali,

$$s(t) = e^{-i\omega_0 t}\sigma(t).$$

jos valaistu kohde on liikkumaton, saadaan siten etäisyydellä R_0 olevasta kohteesta kaiku, joka on amplituditekijää vaille muotoa

$$e(t) = s\left(t - 2\frac{R_0}{c}\right).$$

Määritellään integraali $I = I(\omega)$ kaavalla

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e(t)\overline{s(t)} dt.$$

Heti todetaan integraalin läheinen sukulaisuus ambiguiteettifunktioiden kanssa. Sijoittamalla e:n lauseke tähän integraaliin saadaan

$$I(\omega) = e^{i2\omega_0 R_0/c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \sigma\left(t - 2\frac{R_0}{c}\right) \overline{\sigma(t)} dt,$$

mistä muuttujanvaihdolla $\xi = t - R_0/c$ saadaan edelleen

$$I(\omega) = e^{i2\omega_0 R_0/c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+R_0/c)} \sigma\left(t - \frac{R_0}{c}\right) \overline{\sigma\left(t + \frac{R_0}{c}\right)} dt,$$

joten siis aiemmin käytetyin merkinnöin

$$I(\omega) = e^{i(2\omega_0 - \omega)R_0/c} A\left(\frac{R_0}{c}, -\omega\right).$$

Kiinnitetään nyt käytetyn signaalin muoto. Oletetaan että signaaliksi on valittu taajuusmoduloitu chirppipulssi (2). Tällöin

$$A\left(\frac{R_0}{c}, -\omega\right) = \left(1 - \frac{R_0}{c\Delta}\right) \operatorname{sinc} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_0}{c\Delta}\right)\left(\frac{BR_0}{c} - \Delta\omega\right).$$

Muunnetaan taajuus ω etäisyysparametrin R avulla ilmoitetuksi suureeksi kirjoittamalla $\omega = BR/\Delta c$, jolloin

$$A\left(\frac{R_0}{c}, -\frac{BR}{\Delta c}\right) = \left(1 - \frac{\mathbb{R}_0}{c\Delta}\right) \operatorname{sinc} \frac{B}{2c}\left(1 - \frac{R_0}{c\Delta}\right)(R_0 - R).$$

Oletetaan, että tutkalla luodataan kohteita, jotka ovat suhteellisen lähellä tutkaa, eli

$$R \ll \Delta c.$$

Tällöin pätee approksimatiivisesti

$$A\left(\frac{R_0}{c}, -\frac{BR}{\Delta c}\right) \approx \operatorname{sinc} \frac{B}{2c}(R_0 - R),$$

mistä voidaan heti päätellä tutkan resoluutioksi

$$R_{\text{res}} \sim \frac{2\pi c}{B}.$$

Valitsemalla effektiivinen kaistanleveys B mahdollisimman suureksi saadaan siten tutka, jolla päästään varsin suureen lähikohteiden etäisyysresoluutioon. Käytännössä tällaisten tutkien etäisyysresoluutio voi olla muutaman kymmenen senttimetrin luokkaa.

5.5 SAR–tutkan toimintaperiaate

Tässä luvussa tarkastellaan kaukokartoituksessa käytettävän kuvantavan tutkatyypin toimintaperiaatetta. Tutkatyypin nimi SAR on lyhenne sanoista *Synthetic Aperture Radar*. SAR–tutka on pulssitutka, jolla muodostetaan mikroaaltokuvia maan pinnasta satelliitista tai lentokoneesta käsin. Kuten tutkan nimi jo antaa olettaa, tutkan resoluutiota parannetaan syntetisoimalla useita peräkkäisiä kuvia yhdeksi kuvaksi ikään kuin kuva olisi muodostettu käyttämällä suurta lineaarista antennia. Eräänlaisia passiivisia vastineita SAR–tutkalle ovat radioastronomien nykyisin käyttämät radioteleskooppiryhmät (VLBI–antennit), joissa eri antenneilla tehdyt mittaukset syntetisoidaan yhdeksi tarkaksi kuvaksi. SAR–tutka poikkeaa kuitenkin toimintaperiaatteeltaan siinä suhteessa, että SAR–tutka käyttää tutkan omaa liikettä kohteen suhteen hyväksi resoluution parantamiseksi.
Aloitetaan kiinnittämällä mittausgeometria. Oletetaan, että esimerkiksi lentokone, joka kantaa SAR–tutkaa mukanaan, lentää maan pinnan yläpuolella vakionopeudella ja vakiokorkeudella. Valitsemme karteesiset koordinaatit (x^1, x^2, x^3) siten, että maanpintaa mallintava pinta on (x^1, x^2)–taso $x^3 = 0$. Lentokone lentäköön pitkin suoraa $(x^2, x^3) = (0, h)$, $h > 0$, x^1–akselin positiiviseen suuntaan. Jos siis v on lentokoneen nopeus, ja hetki $t = 0$ valitaan siksi hetkeksi, jolloin lentokone on origon yläpuolella, niin lentokoneen paikkavektori on

$$x_0(t) = (vt, 0, h).$$

Oletamme, että lentokone kantaa mukanaan sivukulmatutkaa, s.o. tutkan antenni on suunnattu vinosti sivulle ja alaviistoon. Oletetaan, että antenni katsoo x^2–akselin positiiviseen suuntaan.
Oletetaan, että tutka lähettää tasaisin väliajoin lyhyitä pulsseja. Tutkan kompleksifioituna signaalina on siis pulssijono

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT), \quad s(t) = e^{-i\omega_0 t}\sigma(t).$$

Kunkin pulssin kesto olkoon Δ, $0 < \Delta < T$. Pulssin *toistotaajuus* f_{pr} (engl. pulse repetition frequency, PRF), määritellään $f_{\mathrm{pr}} = 1/T$.
Kaikusignaalin oletetaan tulevan maan pinnasta, joka on tässä approksimatiivisesti tasomainen. Sirontaa maan pinnasta ei ole tässä esityksessä tarkoitus yksityiskohtaisesti analysoida. Mallinnetaan sirontaa vahvasti yksinkertaistetulla mallilla seuraavasti.
Merkitään maan pinnan pisteitä muuttujalla $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Oletetaan, että tarkasteltava kuva–alue on lähellä y^2–akselia. Kuvan syntetisoimiseen käytetään vain äärellistä määrää tutkan pulsseja. Voimme olettaa, että tutkan signaali on siten äärellinen pulssijono,

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} s(t - nT).$$

Tarkastellaan infinitesimaalista pinta–alkiota $dy = dy^1 dy^2$, jota tutkan antennikeila valaisee. Kun tutka on kaukana maan pinnasta, voidaan tutkan lähettämää aaltoa approksimoida tasoaallolla, jolla on pulssijonon mukainen amplitudi. Oletetaan, että dA heijastaa osan tasoaallosta takaisin tutkan suuntaan, ja merkitään tätä takaisinsirontakerrointa $\lambda(y)$:llä.
Tehdään seuraavat yksinkertaistavat oletukset:

1. Tutka–antennin keilamuodosta johtuvat intensiteetin vaihtelut pussijonon S_N keston aiakana eivät ainakaan kuva–alueen keskiosassa ole merkittäviä.

2. Takaisinsirontakerroin $\lambda(y)$ ei vaihtele taajuuden funktiona.

3. Funktion $\lambda(y)$ variaatiot tutkan katselukulman muuttuessa pulssista toiseen ovat suhteellisen pienet tutkan liikuessa alueen yli.

4. Tutkan lentonopeus on niin hidas, että tutkan liike pulssin lähetyksen ja vastaanoton välillä voidaan jättää huomiotta. Tämä merkitsee sitä, että yksittäisen pulssin aikainen Doppler–siirtymä voidaan unohtaa.

Oletusta 4 kutsutaan joissakin kirjallisuuslähteissä *stop–start approksimaatioksi*: Tutkan ajatellaan hetkellisesti aina pysähtyvän lähettämään ja vastaanottamaan yhtä yksittäistä pulssia. Approksimaatio edellyttää luonnollisesti lyhyiden pulssien käyttöä. Esimerkiksi sonar–sovelluksissa tämä approksimaatio ei välttämättä ole hyvä.
Edellä esitettyjä oletuksia käyttäen voimme kirjoittaa approksimatiivisen lausekkeen S_N:n kaikusignaalille muodossa

$$e_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e_n(t),$$

missä

$$e_n(t) \approx C \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(y) s\left(t - nT - 2\frac{r_n(y)}{c}\right) dy. \tag{4}$$

Tässä $r_n(y)$ on tutkan, ja maapisteen etäisyys heltkellä $t = nT$,

$$r_n(y) = \sqrt{(y^1 - vnT)^2 + (y^2)^2 + h^2}.$$

Vakioon C on upotettu muun muassa signaalin vaimeneminen etäisyyden funktiona sekä antennin keilafunktio. Jatkossa tämä tekijä oletetaan ykköseksi.
Yleensä SAR–systeemien suunnittelussa on tapana valita pulssintoistotaajuus riittävän pieneksi, jotta peräkkäiset pulssit eivät sekoitu, toisin sanoen seuraava pulssi lähetetään vasta, kun edellinen pulssi on täysin vastaanotettu. Tämä rajoitus voidaan periaattessa kiertää ja ottaa pulssien päällekkäisyys huomioon

signaalinkäsittelyssä. Tässä esityksessä oletamme kuitenkin, että pulssien päällekkäisyys vältetään. Pisteessä y olevasta kohteesta tuleva n:s kaiku on nollasta poikkeava, kun

$$-\frac{\Delta}{2} \le t - nT - 2\frac{r_n(y)}{c} \le \frac{\Delta}{2}.$$

Jos $r_{\min}$ ja $r_{\max}$ ovat minimi– ja maksimietäisyydet merkittävän kaiun antaviin maastokohteisiin, on n:s kaikusignaali nollasta poikkeava aikavälillä

$$nT + 2\frac{r_{\min}}{c} - \frac{\Delta}{2} \le t \le nT + 2\frac{r_{\max}}{c} + \frac{\Delta}{2}.$$

Tästä nähdään, että peräkkäisten kaikujen päällekkäisyys vältetään, jos

$$\frac{\Delta}{2} + 2\frac{r_{\max}}{c} < T - \frac{\Delta}{2} + 2\frac{r_{\min}}{c},$$

eli

$$T > \Delta + 2\frac{r_{\max} - r_{\min}}{c}.$$

Olettaen, että T toteuttaa mainitun ehdon, ovat peräkkäisten pulssikaikujen kantajat oleellisesti erilliset, ja siten kaiut voidaan prosessoida toisistaan riippumattomasti.

Tarkastellaan nyt erikseen yksittäistä kaikusignaalia e_n. Korreloidaan e_n vastaavan lähetetyn signaalin $s_n(t) = s(t - nT)$ kanssa. Tätä toimenpidettä kutsutaan toisinaan *pulssikompressioksi eäisyyssuunnassa.* Lasketaan siis korrelaatiointegraali

$$\mu_n(\tau) = e^{i\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e_n(t)\overline{s(t - nT - \tau)}dt.$$

Eksponenttitekijä on sisällytetty edelläolevaan kaavaan mukavuussyistä. Tätä integraalia sanotaan usein *sovitetuksi suodatukseksi* (engl. matched filtering). Integraali muistuttaa Doppler–tutkan korrelaatiointegraalia. Koska emme kuitenkaan ole kiinnostuneita yksittäisen pulssin Doppler–effektistä, on eksponenttitekijä jätetty integraalista pois.

Sijoitetaan nyt e_n:n approksimatiivinen lauseke (4) edellä kirjoitettuun integraaliin, jolloin saamme

$$\begin{aligned}
\mu_n(\tau) &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(y) e^{i\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t - nT - 2\frac{r_n(y)}{c}\right)\overline{s(t - nT - \tau)}dt dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(y) e^{i\omega_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\xi + \tau - 2\frac{r_n(y)}{c}\right)\overline{s(\xi)}d\xi dy.
\end{aligned}$$

Tässä ξ–integraali voidaan kirjoittaa signaalin σ ambiguiteettifunktion avulla. Saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\xi + \eta)\overline{s(\xi)}d\xi = e^{-i\omega_0\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\xi + \eta)\overline{\sigma(\xi)}d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-i\omega_0\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\left(\xi+\frac{\eta}{2}\right)\overline{\sigma\left(\xi-\frac{\eta}{2}\right)}d\xi \\
&= = e^{-i\omega_0\eta}A(\eta,0),
\end{aligned}
$$

joten

$$
\mu_n(\tau) = \int_{\mathbb{R}^2}\lambda(y)e^{i2\omega_0 r_n(y)/c}A\left(\tau - 2\frac{r_n(y)}{c},0\right)dy.
$$

Tästä muodosta nähdään, että parametri τ on etäisyydenluontoinen suure: Kun $\tau = 2r_n(y)/c$, on ambiguiteettifunktiolla A maksimi. Otetaan siksi käyttöön etäisyysmuuttuja r, ja tehdään muuttujanvaihto $\tau = 2r/c$, sekä määritellään *etäisyysambiguiteettifunktio*

$$
R(r - r_n(y)) = A\left(2\frac{r}{c} - 2\frac{r_n(y)}{c},0\right).
$$

Tällä merkinnällä siis

$$
\mu_n\left(2\frac{r}{c}\right) = \int_{\mathbb{R}^2}\lambda(y)e^{i2\omega_0 r_n(y)/c}R(r - r_n(y))dy.
$$

Tästä kaavasta nähdään, että funktioon μ_n on integroitu yhteen kaikki smalla etäisyydellä tutkasta olevien pisteiden kaiut. Tarkoitus on seuraavaksi käyttää oskilloivaa eksponenttia hyväksi ja integroida funktiot μ_n sopivasti yhteen. Tätä integrointia sanotaan *pulssikompressioksi atsimutisuunnassa*. Jotta tämä integrointi tulisi ymmärrettäväksi, tehdään aluksi joitain approksimaatioita. Kirjoitetaan

$$
r_n(y) = \sqrt{(y^1 - nvT)^2 + (y^2)^2 + h^2} = \sqrt{(y^1 - nvT)^2 + \rho^2},
$$

missä ρ on pisteen y vino etäisyys (eng. slant range) tutkasta, toisin sanoen etäisyys tutkan lentosuorasta. Olettaen, että $|y^1 - nvT|$ on huomattavasti pienempi kuin r, voimme kirjoittaa

$$
r_n(y) = \rho\left(1 + \frac{(y^1 - nvT)^2}{\rho^2}\right)^{1/2} \approx \rho + \frac{(y^1 - nvT)^2}{2\rho}.
$$

Tässä summassa jälkimmäinen termi on kuva–alueessa oletuksen mukaan huomattavasti ensimmäistä pienempi, joten ilmeisesti voidaan kohtalaisella tarkkuudella tehdä approksimaatio

$$
R(r - r_n(y)) \approx R(r - \rho).
$$

Sen sijaan oskilloivan termin eksponentissa etäisyyttä kerrotaan suurella luvulla $2\omega_0/c$, joten korjaustermi on otettava huomioon, jolloin

$$
e^{i2\omega_0 r_n(y)/c} \approx e^{i2\omega_0\rho/c}e^{i\omega_0(y^1 - nvT)^2/(c\rho)} = a(\rho, y^1 - nvT),
$$

eli

$$\mu_n\left(2\frac{r}{c}\right) \approx \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(y) a(\rho, y^1 - nvT) R(r-\rho) dy.$$

Olkoon $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ mikä tahansa kuva–alueen piste, ja oletetaan, että pisteen vino etäisyys on r, eli

$$r = \sqrt{(x^2)^2 + h^2}.$$

SAR–tutkan kuva $I_{\mathrm{SAR}}(x)$ määritellään nyt summana

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{SAR}}(x) &= \sum_{n=-N}^{N} \mu_n\left(2\frac{r}{c}\right) \overline{a(r, x^1 - nvT)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(y) A_{\mathrm{SAR}}(x, y) dy, \end{aligned}$$

missä $A_{\mathrm{SAR}}(x, y)$ on SAR–tutkan ambiguiteettifunktio, jolle on saatu approksimatiivinen lauseke

$$A_{\mathrm{SAR}}(x, y) \approx R(r-\rho) \sum_{n=-N}^{N} a(\rho, y^1 - nvT) \overline{a(r, x^1 - nvT)}.$$

Tarkastellaan vielä, millainen resoluutio tutkan lentosuunnassa on saatu aikaan. Jos kahden pisteen x ja y vinot etäisyydet poikkeavat paljon toisistaan, niin ambiguiteettifunktio on hyvin pieni. Tarkastellaan siksi diskreettiä summaa, kun vinot etäisyydet yhtyvät. Tällöin

$$\sum_{n=-N}^{N} a(r, y^1 - nvT) \overline{a(r, x^1 - nvT)} = \sum_{n=-N}^{N} e^{i\omega_0((y^1 - nvT)^2 - (x^1 - nvT)^2)/(cr)}$$

$$\begin{aligned} &= e^{i\omega_0((y^1)^2 - (x^1)^2)/(cr)} \sum_{n=-N}^{N} \left(e^{i2\omega_0 vT(y^1 - x^1)/(cr)}\right)^n \\ &= e^{i\omega_0((y^1)^2 - (x^1)^2)/(cr)} \frac{\sin(2N+1)\frac{\omega_0 vT}{cr}(y^1 - x^1)}{\sin\frac{\omega_0 vT}{cr}(y^1 - x^1)}. \end{aligned}$$

Saadun kaavan sukulaisuus pulssijonolle lasketun ambiguiteetin kanssa on ilmeinen.

Voimme nyt arvioida SAR–tutkan resoluutioita eri suunnissa. Oletetaan, että pulssina käytetään laatikkopulssia, jolloin

$$R(r-\rho) = (1 - 2\frac{|r-\rho|}{c\Delta}),$$

eli resoluutio sivusuunnassa on luokkaa

$$x^2_{\mathrm{res}} \sim \frac{c\Delta}{2}.$$

Tutkan lentosuunnassa resoluutiolle saadaan edellä laskettua arvio

$$x^1_{rmres} \sim \frac{\pi c r}{(2N+1)\omega_0 v T}.$$