4 Impedanssitomografiaa

Impedanssitomografia on menetelmä, jossa pyritään estimoimaan kappaleen sisäistä impedanssijakaumaa tekemällä sähkömagneettisia mitauksia kappaleen reunalla. Menetelmää voidaan soveltaa lääketieteellisessä tutkimuksessa, jolloin tutkittava kappale on esimerkiksi potilaan rintakehä tai pää, sekä ainetta rikkomattomassa materiaalin testauksessa, jolloin tutkittava kohde on esimerkiksi lentokoneen runko tai voimalan jäähdytysputki. Impedanssitomografian perusajatus sisältyy Ohmin lakiin,

$$U = ZI,$$

missä I on sähkövirta, U on jännite ja Z on impedanssi. Olettamalla virta tasavirraksi Z merkitsee yksinkertaisesti sähkövastusta. Matalilla taajuuksilla esimerkiksi yksinkertaiselle RCL–piirille voitaisiin kirjoitta

$$Z = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

missä R on vastus, L on induktanssi, C on kapasitanssi ja ω on aikaharmonisen virran kulmataajuus. Piirin impedanssi saadaan siten selville johtamalla piirin läpi virta ja mittaamalla vastaava jännite, joka tarvitaan kyseisen virran ylläpitämiseksi. Impedanssitomografiassa tutkittavan kappaleen pinnalle kiinnitetään joukko elektrodeja, joihin johdetaan halutunlainen matalataajuuksinen sähkövirta. Mittaamalla jännitejakauma kappaleen pinnalla saadaan informaatiota kappaleen sisäisestä impedanssista. Luonnollisesti mittaus on yksinkertaista impedanssimittausta mutkikkaampi, ja virran ja jännitteen välinen riippuvuus vaatii Ohmin lakia paremman mallin.

Aloitamme tarkastelemalla erilaisia suoraa ongelmaa kuvailevia matemaattisia malleja.

4.1 Suora ongelma

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tutkittava kappale, missä $n = 2$ tai $n = 3$. Kappale Ω oletetaan yhdesti yhtenäiseksi ja rajoitetuksi alueeksi, jonka komplementti on yhtenäinen. Komplementin yhtenäisyys merkitsee siis, että koko kappaleen reuna $\partial\Omega$ on näkyvissä ulkoalueeseen, jossa reunamittaukset tehdään. Tapauksessa $n = 2$ ajatellaan, että tutkittava kappale on todellisen kolmiulotteisen kappaleen kaksiulotteinen tasoleikkaus. Kappaleen reunan sileyttä ei tarkemmin spesifioida tässä, vaan oletetaan, että kyseessä on "riittävän säännöllinen" kappale.

Tarkastellaan aikaharmonisia Maxwellin yhtälöitä Ω:ssa. Olkoot σ, ϵ ja μ joukossa Ω määriteltyjä funktioita. Oletetaan, että on olemassa vakiot $\sigma_M > 0$, $\epsilon_m > 0$ ja $\epsilon_M > 0$ sekä $\mu_m > 0$ ja $\mu_M > 0$ siten että

$$0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_M, \quad \epsilon_m \leq \epsilon(x) \leq \epsilon_M, \quad \mu_m \leq \mu(x) \leq \mu_M.$$

Oletamme tässä, että funktiot σ, ϵ ja μ ovat riittävän sileitä funktioita. Funktio σ kuvaa kappaleen johtavuusjakaumaa, ϵ permittiivisyysjakaumaa ja μ permeabiliteettiä. Olkoon $\omega \geq 0$ taajuus, joka oletetaan kiinteäksi. Määritellään

$$\gamma(x) = \sigma(x) - i\omega\epsilon(x).$$

Maxwellin yhtälöt kiinteällä taajuudella ovat muotoa

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= i\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= (-i\omega\epsilon + \sigma)\vec{E} = \gamma\vec{E}. \end{aligned}$$

Kun taajuus ω on riittävän pieni, voidaan tehdä approksimaatio

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \approx 0.$$

Koska Ω on yhdesti yhtenäinen, seuraa $\vec{E}$:lle esitys skalaaripotentiaalin u avulla:

$$\vec{E} = -\nabla u.$$

Soveltamalla divergenssiä jälkimmäiseen Maxwellin yhtälöön saadaan yhtälö

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0. \tag{1}$$

Tarkastellaan seuraavaksi reunaehtoja. Ensimmäinen tarkasteltavista malleista on matemaattinen idealisaatio, joka jättää elektrodit täysin huomiotta. Kutsutaan tätä mallia *jatkuvaksi malliksi.*

Jatkuva malli: Oletetaan, että kappaleeseen voidaan syöttää reunan läpi millainen virrantiheys hyvänsä. Matemaattisesti tämä merkitsee Neumannin reunaehtoa

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = f,$$

missä f on annettu virrantiheys. Tällä reunadatalla potentiaali u jää vakiota vaille yksikäsitteiseksi. Vakion kiinnittämiseksi vaaditaan, että

$$\int_{\partial\Omega} u dS = 0. \tag{2}$$

Mittausdataksi oletetaan jännitteen u reuna–arvot. Reuna–arvodatan muodostavat siten reunalla määritellyt funktioparit

$$\left(f, u|_{\partial\Omega}\right).$$

Toinen usein käytetty tapa määritellä reunadata on sanoa, että on mitattu operaattori

$$Z_\gamma : \gamma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} \mapsto u|_{\partial\Omega}.$$

Kuvausta Z_γ sanotaan ongelman *Neumann–Dirichlet–kuvaukseksi* tai *impedanssikuvaukseksi.*

Edellä esitetty matemaattista mallia on tutkittu paljon sen matemaattisen selkeyden vuoksi. Malli on kuitenkin käytännön mittauksia ajatellen jonkin verran epätarkka, mikä johtuu juuri elektrodeista. Seuraava malli, jota voidaan kutsua *aukkomalliksi*, ottaa karkeasti elektrodit huomioon.

Aukkomalli: Oletetaan, että kappaleen reunalle on kiinnitetty L elektrodia. Elektrodia mallinnetaan reunan $\partial\Omega$ osajoukkoina $e_\ell \subset \partial\Omega$, $1 \le \ell \le L$. Aukkomallissa oletetaan, että virrantiheys läpi kunkin elektrodin on vakio, kun taas elektrodien väleissä ("aukoissa") virrantiheys häviää. Elektrodin e_ℓ läpi syötettävä kokonaisvirta olkoon I_ℓ. Tällöin reunaehdoksi voidaan määritellä Neumannin ehto

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x)\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} \frac{1}{|e_\ell|} I_\ell, & x \in e_\ell, \quad 1 \le \ell \le L \\ 0, & x \notin \cup e_\ell \end{cases}$$

Kuten jatkuvassa mallissa kiinnitetään jännite vaatimalla integraaliehto (2). Mittausdataksi voidaan määritellä esimerkiksi potentiaalin keskiarvotarvot yli kunkin elektrodin,

$$U_\ell = \frac{1}{|e_\ell|} \int_{e_\ell} u dS, \quad 1 \le \ell \le L.$$

Voidaan myös sanoa, että mittausdatana on $L \times L$–matriisi

$$R_\gamma : I \mapsto U,$$

missä

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_L \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_L \end{pmatrix}.$$

Vektoria I kutsutaan jatkossa *virtakuvioksi* ja vastaavaa jännitevektoria V *jännitekuvioksi.* Matriisia R_γ kutsutaan *impedanssimatriisiksi.* Varauksen säilymislaki edellyttää, että virtakuvio toteuttaa ehdon

$$\sum_{\ell=1}^{L} I_\ell = 0. \tag{3}$$

Edellä esitetty aukkomalli on sikäli epäfysikaalinen, että Neumannin reunaehtoa ei johdettu mistään elektrodeja kuvaavasta fysikaalisesta periaatteesta. Seuraavaksi esitettävä malli olettaa, että elektrodit ovat täydellisiä johtimia.

Oikosulkumalli: Jos elektrodit oletetaan täysjohtaviksi, on jännitteen pitkin kutakin elektrodia oltava vakio. Saadaan siten reunaehto

$$u|_{e_\ell} = U_\ell, \quad 1 \le \ell \le L. \tag{4}$$

Elektrodit siis oikosulkevat potentiaalin. Tässä mallissa on huomattava, että jännitteet U_ℓ ovat tuntemattomia, ja niiden ratkaiseminen on osa suoran ongelman ratkaisua. Tässä mallissa ei enää voida olettaa virrantiheyden olevan vakio pitkin elektrodeja, vaan vaaditaan, että

$$\frac{1}{|e_\ell|}\int_{e_\ell}\gamma\frac{\partial u}{\partial n}dS = I_\ell,$$

toisin sanoen tiedetään vain kunkin elektrodin läpi virtaava kokonaisvirta. Elektrodien välissä oletetaan virrantiheyden jälleen häviävän, eli

$$\gamma(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, \quad x \notin \bigcup_{\ell=1}^{L} e_\ell.$$

Virtakuviolta vaaditaan luonnollisesti varauksen säilymislaki (3), ja ratkaisun yksikäsitteisyyden takaamiseksi voidaan vaatia joko integraaliehto (2) tai sen diskreetti versio

$$\sum_{\ell=1}^{L} U_\ell = 0.$$

Kun edellä esitetyllä oikosulkumallilla laskettuja jännitteitä verrataan todellisiin mittauksiin, osoittautuu, että malli ei ole täysin yhtäpitävä mittausten kanssa. Syyksi voidaan ajatella elektrodien ja kappaleen välinen *kontakti–impedanssi*, sekä korkeammilla taajuuksilla esiin tuleva vierekkäisten elektrodien välinen kapasitanssi. Näitä ilmiöitä pyritään mallittamaan seuraavassa reunaehtojen valinnassa.

Kontaktimalli: Kontaktimallissa oletetaan, että tutkittavan kappaleen ja elektrodien väliin muodostuu ohut kerros, joka vaikuttaa elektrodin impedanssiin. Tämä toteutetaan korvaamalla oikosulkumallin reunaehto (4) reunaehdolla

$$\left(u + z_\ell\gamma\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{e_\ell} = U_\ell, \quad 1 \leq \ell L,$$

missä luvut z_ℓ ovat elektrodien *kontakti–impedanssit*. Kaikki muut reunaehdot ovat kuten oikosulkumallissa.

Tarkastellaan lähemmin eri elektrodimalleja. Jatkossa merkitään impedanssimatriisia lyhyesti R:llä. Ennen kuin kiinnitetään geometriaa, todistetaan seuraava yksinkertainen tulos.

Lemma 4.1 *Impedanssimatriisi $R \in \mathbb{C}^{L\times L}$ on symmetrinen kaikissa elektrodimalleissa, s.o.*

$$R^T = R.$$

Todistus: Koska $R^* = \overline{R}^T$, niin riittää osoittaa, että $\overline{R} = R^*$. Olkoot $I \in \mathbb{C}^L$ ja $J \in \mathbb{C}^L$ kaksi virtakuviota, jotka toteuttavat varauksen säilymislain (3). Merkitään U:lla virtakuviota I vastaavaa jännitekuviota, ja vastaavaa potentiaalifunktiota u:lla. Vastaavasti, olkoon V virtakuviota $\overline{J}$ vastaava jännitekuvio ja v potentiaalifunktio. (Huomaa, että tässä virtakuvio J kompleksikonjugoidaan.) Tavoitteena on näyttää, että

$$\langle RI, J\rangle = \langle I, \overline{R}J\rangle,$$

missä merkintä $\langle\ ,\ \rangle$ merkitsee kompleksista sisätuloa. Koska $RI = U$ ja $R\overline{J} = V$, niin komponenttimuodossa kirjoitettuna tulee näyttää yhtälö

$$\sum_{\ell=1}^{L} U_\ell \overline{J_\ell} = \sum_{\ell=1}^{L} I_\ell V_\ell. \tag{5}$$

Lähtökohtana on ensimmäinen Greenin kaava,

$$\int_\Omega \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \gamma u \frac{\partial v}{\partial n} dS.$$

Yhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa toisin elektrodimallista riippuen. Aukkomallissa

$$\int_{\partial\Omega} \gamma u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \sum_{\ell=1}^{L} \overline{J_\ell} \frac{1}{|e_\ell|} \int_{e\ell} u dS = \sum_{\ell=1}^{L} \overline{J_\ell} U_\ell.$$

Kontaktimallissa puolestaan saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \gamma u \frac{\partial v}{\partial n} dS &= \sum_{\ell=1}^{L} \int_{e_\ell} \gamma u \frac{\partial v}{\partial n} dS \\ &= \sum_{\ell=1}^{L} \left(U_\ell \overline{J_\ell} - z_\ell \int_{e_\ell} \gamma \frac{\partial u}{\partial n} \gamma \frac{\partial v}{\partial n} dS \right). \end{aligned}$$

Oikosulkumalli antaa saman tuloksen, kun valitaan $z_\ell = 0$. Toisaalta Greenin kaavaa soveltaen saadaan

$$\int_\Omega \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Laskemalla kuten edellä saadaan oikealle puoleelle nyt esitys

$$\int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial n} dS = \sum_{\ell=1}^{L} I_\ell \frac{1}{|e_\ell|} \int_{e\ell} v dS = \sum_{\ell=1}^{L} I_\ell V_\ell$$

aukkomallia käyttäen ja kontakti– ja oikosulkumallissa ($z_\ell = 0$)

$$\int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial n} dS = \sum_{\ell=1}^{L} \left(I_\ell V_\ell - z_\ell \int_{e_\ell} \gamma \frac{\partial u}{\partial n} \gamma \frac{\partial v}{\partial n} dS \right).$$

Vertaamalla näin saatuja lausekkeita todetaan, että yhtälö (5) pätee. □

Kiinnitetään nyt geometria: Oletetaan, että tutkittava kappale on tason yksikkökiekko D, ja elektrodit on kiinnitetty tasaisin välein D:n reunalle. Merkitään elektrodien keskipisteiden tasokulmia θ_ℓ:llä,

$$\theta_\ell = \frac{2\pi}{L}\ell, \quad 1 \leq \ell \leq L.$$

Oletetaan vielä, että γ on radiaalinen funktio, $\gamma = \gamma(r)$ ja että elektrodit ovat keskenään identtisiä. Kontaktimallia käytettäessä oletetaan siis, että kontakti–impedanssi ei vaihtele elektrodista toiseen.
Määritellään diskreetti rotaatio Q kaavalla

$$Q \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_L \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{L-1} \end{pmatrix}.$$

Oletetuista symmetrioista johtuen voidaan päätellä, että mittaus $U = RI$ on invariantti diskreetin rotaation suhteen, eli pätee

$$RQI = QRI. \tag{6}$$

Tästä relaatiosta voidaan päätellä matriisin R ominaisvektorit.

Lause 4.1 *Matriisilla R on yksi ei–degeneroitunut nollasta poikkeava ominaisarvo ja $L/2 - 1$ nollasta poikkeavaa ominaisarvoa, joden kertaluku on kaksi. Vastaavat ominaisvektorit ovat trigonometrisia virtakuvioita*

$$I^{(k)} = \begin{pmatrix} \cos k\theta_1 \\ \vdots \\ \cos k\theta_L \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq L/2,$$

$$I^{(L/2+k)} = \begin{pmatrix} \sin k\theta_1 \\ \vdots \\ \sin k\theta_L \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq L/2 - 1.$$

Todistus: Lähtökohtana on diskreetin rotaation Q ominaisarvot λ_ℓ ja –vektorit $a^{(\ell)}$, jotka ovat

$$\lambda_\ell = e^{i\theta_\ell}, \quad a^{(\ell)} = \begin{pmatrix} e^{i(L-1)\theta_\ell} \\ e^{i(L-2)\theta_\ell} \\ \vdots e^{i\theta_\ell} \\ 1 \end{pmatrix},$$

kuten helposti todetaan. Yhtälöstä (6) seuraa, että

$$QRa^{(\ell)} = RQa^{(\ell)} = \lambda_\ell Ra^{(\ell)},$$

joten $Ra^{(\ell)}$ on myös ominaisvektori, ja siten

$$Ra^{(ell)} = \mu_\ell a^{(\ell)} \tag{7}$$

jollain $\mu_\ell \in \mathbb{C}$. Koska Q on reaalinen matriisi, niin myös $\overline{R}$ kommutoi Q:n kanssa, ja siksi myös

$$\overline{R}a^{(\ell)} = \nu_\ell a^{(\ell)}$$

jollain $\nu_\ell \in \mathbb{C}$. Kompleksikonjugoimalla seuraa tästä, että

$$R\overline{a^{(\ell)}} = \overline{\nu_\ell} R\overline{a^{(\ell)}}. \tag{8}$$

Koska

$$\langle Ra^{(\ell)}, a^{(\ell)} \rangle = \mu_\ell |a^{(\ell)}|^2,$$

ja toisaalta edellisen lemman perusteella

$$\langle Ra^{(\ell)}, a^{(\ell)} \rangle = \langle a^{(\ell)}, R^* a^{(\ell)} \rangle = \langle a^{(\ell)}, \overline{R}a^{(\ell)} \rangle = \overline{\nu_\ell} |a^{(\ell)}|^2,$$

joten $\overline{\nu_\ell} = \mu_\ell$. Laskemalla yhtälöt (7) ja (8) puolittain yhteen ja toisaalta vähentämällä ne puolittain saadaan yhtälöt

$$Rc^{(\ell)} = \mu_\ell c^{(\ell)}, \quad Rs^{(\ell)} = \mu_\ell s^{(\ell)},$$

missä vektorit $c^{(\ell)}$ ja $s^{(\ell)}$ ovat

$$c^{(\ell)} = \begin{pmatrix} \cos(L-1)\theta_\ell \\ \cos(L-2)\theta_\ell \\ \vdots \\ \cos\theta_\ell \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s^{(\ell)} = \begin{pmatrix} \sin(L-1)\theta_\ell \\ \sin(L-2)\theta_\ell \\ \vdots \\ \sin\theta_\ell \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Väite saadaan havaitsemalla, että

$$\cos(L-m)\theta_\ell = \cos m\theta_\ell = \cos \ell\theta_m,$$

$$\sin(L-m)\theta_\ell = -\sin m\theta_\ell = -\sin \ell\theta_m.$$

□

Lauseen antamia virtakuvioita sanotaan kiertosymmetrisen mittauksen *ominaisvirtakuvioiksi.* Yleisemmin ominaisvirtakuvioilla on keskeinen asema, kun tutkitaan impedanssitomografian resoluutiota eli kykyä erotella kaksi erilaista johtavuusjakaumaa toisistaan. Tarkastellaan seuraavaksi tätä kysymystä lähemmin. Olkoot γ_1 ja γ_2 kaksi johtavuusjakaumaa kappaleessa Ω, ja $I \neq 0$ jokin virtakuvio. Määritellään I:n *erottelukyky* jakaumien γ_1 ja γ_2 suhteen kaavalla

$$d(I,\gamma_1,\gamma_2) = \frac{\|R_{\gamma_1}I - R_{\gamma_2}I\|}{\|I\|}.$$

Voidaan ajatella, että γ_1 on todellinen johtavuusjakauma kappaleessa ja γ_2 on tunnettu referenssijohtavuusjakauma. Kysytään, voidaanko todellinen jakauma mittaamalla havaita referenssijakaumasta poikkeavaksi. Ilmeisesti paras virtakuvio poikkeaman havaitsemiseksi on sellainen, jolle erottelukyky maksimoituu. Määritellään *optimaalinen virtakuvio* I^{opt} yhtälöllä

$$d(I^{\mathrm{opt}},\gamma_1,\gamma_2) = \max_{\|I\|=1} d(I,\gamma_1,\gamma_2), \quad \|I^{\mathrm{opt}}\| = 1.$$

missä maksimi lasketaan yli kaikkien normiehdon totuttavien virtakuvioiden. Osoittautuu, että optimaalinen virtakuvio voidaan hakea adaptiivisesti ilman, että tuntematonta jakaumaa γ_1 vastaavaa impedanssimatriisia R_{γ_1} lainkaan tunnetaan. Seuraava algoritmi antaa optimaalisen virtakuvion, kuten myöhemmin todistetaan.

Algoritmi:

1. Valitaan mielivaltainen virtakuvio I^0, jolle $\|I^0\| = 1$, ja asetetaan $k = 0$.

2. Mitataan $U^k = R_{\gamma_1}I^k$ ja lasketaan $V^k = R_{\gamma_2}I^k$.

3. Lasketaan residuaali $\delta^k = \|U^k - V^k\|$. Jos $\delta^k < \varepsilon$=mittaustarkkuus, lopetetaan. Jos $\delta^k \geq \varepsilon$, määritellään

   $$I^{k+1} = \frac{1}{\delta^k}(U^k - V^k),$$

   asetetaan $k = k+1$ ja palataan kohtaan 2.

Edellä esitetty algoritmi on osana amerikkalaisen Rensselaer Polytechnic Institute'in kehittämässä impedanssitomografiajärjestelmässä, josta käytetään nimeä ACT lyhenteenä sanoista *Adaptive Current Tomograph* juuri tämän adaptiivisen menetelmän vuoksi. Seuraava lause osoittaa, miksi algoritmi toimii. Tätä varten määritellään kompleksisen matriisin moduli seuraavasti. Olkoon A neliömatriisi, ja $A = UDV^*$ sen singulaariarvohajotelma. Tässä V^* on unitaarisen matriisin V

adjungaatti eli hermiittinen transpoosi. Nyt matriisi A^*A on itseadjungoitu, ja pätee

$$A^*A = V(D^*)U^*UDV^* = V|D|^2V^*,$$

missä

$$|D| = \mathrm{diag}(|d_1|, \ldots, |d_L|).$$

Määritellään merkintä

$$|A| = V|D|V^*.$$

Lause 4.2 *Optimaalinen virtakuvio $I^{\rm opt}$ on matriisin $|R_{\gamma_1} - R_{\gamma_2}|$ suurinta ominaisarvoa d_1 vastaava normitettu ominaisvektori. Olkoon $d_2 < d_1$ on toiseksi suurin ominaisarvo, niin edellä esitetyn algoritmin vektorit I^k konvergoivat kohti vektoria $I^{\rm opt}$ siten, että*

$$\|I^k - I^{\rm opt}\| = \mathcal{O}((\frac{d_2}{d_1})^k).$$

Lauseen alkuosa on suora seuraus siitä, että määritelmän mukaan

$$\|R_{\gamma_1} - R_{\gamma_2}\| = \max_{\|I\|=1} d(I, \gamma_1, \gamma_2),$$

ja matriisin normi ja suurin singulaariarvojem moduleista yhtyvät. Konvergenssi puolestaan seuraa alla esitetystä symmetrisiä matriiseja koskevasta yleisestä tuloksesta.

Lemma 4.2 *Olkoon A itseadjungoitu ei–negatiividefiniitti $L \times L$–matriisi, ja olkoon*

$$A\nu_\ell = d_\ell \nu_\ell, \quad \|\nu_\ell\| = 1, \quad 1 \le \ell \le L,$$

missä

$$d_1 > d_2 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_L \ge 0.$$

Olkoon $\langle z, \nu_1 \rangle \neq 0$, $\|z\| = 1$, ja määritellään jono z^j kaavalla

$$z^j = \frac{Az^{j-1}}{\|Az^{j-1}\|}, \quad j \ge 1.$$

Tällöin

$$\|z^j \pm \nu_1\| = \mathcal{O}((\frac{d_2}{d_1})^j).$$

Todistus: Matriisi A on itseadjungoitu, joten sen ominaisvektorit muodostavat ortogonaalisen kannan. Olkoon

$$z = \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell \nu_\ell, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A^j z &= \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell d_\ell^j \nu_\ell = \alpha_1 d_1^j \left(\nu_1 + \sum_{ell=2}^{L} \frac{\alpha_\ell}{\alpha_1} \left(\frac{d_\ell}{d_1}\right)^j v_\ell \right) \\ &= \alpha_1 d_1^j (\nu_1 + r^j). \end{aligned}$$

Todetaan, että

$$\|r^j\| = \mathcal{O}((\frac{d_2}{d_1})^j), \quad \langle \nu_1, r^j \rangle = 0.$$

Koska $z^j \in \mathrm{sp}\{A^j z\}$ ja $\|z^j\| = 1$, niin

$$\begin{aligned} z^j &= = \pm \frac{1}{\|A^j\|} A^j z = \pm \frac{1}{(1 + \|r^j|^2)^{1/2}} (\nu_1 + r^j) \\ &= \pm \nu_1 + \mathcal{O}((\frac{d_2}{d_1})^j). \end{aligned}$$

□

Harjoitustehtäviä:

1. Osoita, että impedanssioperaattori Z_γ on symmetrinen, eli

$$\int_{\partial\Omega} j_1 Z_\gamma j_2 dS = \int_{\partial\Omega} j_2 Z_\gamma j_1 dS.$$

2. Laske jatkuvaa mallia käyttäen virrantiheyttä

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial D} = e^{in\theta}$$

vastaava jännite $u_0(r, \theta)$, kun D on tason yksikkökiekko ja $\gamma = \gamma_0$=vakio.

3. Näytä, että jatkuvassa mallissa pätee

$$\int_{\partial\Omega} j Z_\gamma j dS = \int_\Omega \gamma |\nabla u|^2 dx,$$

missä

$$j = \gamma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}.$$

Yhtälö voidaan tulkita siten, että oikea puoli ilmaisee, millä voimakkuudella γ:n arvot eri puolilla kappaletta vaikuttavat vasemman puolen datasta riippuvaan lausekkeeseen. Funktiota $|\nabla u|^2$ voidaan siten kutsua *herkkyysmatriisiksi.*

4. Sovelletaan edellisen tehtävän tulosta kiekkoon, jonka johtavuus on vakip, $\gamma = \gamma_0$. Tehtävän 2 ratkaisua käyttäen laske säde r_n, jolla pätee

$$|\int_{\partial D} jZ_\gamma j dS - \int_{r_n<r\leq 1} \gamma|\nabla u_0|^2 dx| < 0.01.$$

Tulkinta?

5. Olkoon $\gamma = \gamma(r)$ yksikkökiekon radiaalinen johtavuusjakauma, jolle

$$\gamma(r) = \begin{cases} \gamma_1, & 0 \leq r < r_0, \\ \gamma_0, & r_0 \leq r < 1. \end{cases}$$

Ratkaise potentiaali $u = u_1(r,\theta)$ jatkuvaa mallia käyttäen, kun reunaehtona on

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = e^{in\theta}.$$

Huomaa, että kohdassa $r = r_0$ tulee vaatia jatkuvuusehdot

$$u(r_0-,\theta) = u(r_0+,\theta), \quad \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial r}(r_0-,\theta) = \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial r}(r_0+,\theta).$$

6. Laske edellisen tehtävien ratkaisuja käyttäen erotus $(u_1 - u_0)|_{\partial D}$. Oletetaan, että mittaustarkkuus tiedetään muodossa

$$|(u_{\text{mitattu}} - u_{\text{todellinen}})|_{\partial D}| \leq \varepsilon.$$

Arvioi, miten suuren epähomogeenisuuden kiekon keskellä voi luotettavasti havaita käyttäen virransyöttönä funktiota $e^{in\theta}$.

4.2 Takaisinprojektioalgoritmi

Käydään läpi eräs tunnettu yksinkertainen inversioalgoritmi, joka perustuu impedanssitomografiaongelman linearisaatioon. Algoritmi on tulkinta–algoritmina nykyisin jo kaupallisessa käytössä olevassa järjestelmässä, jonka on kehittänyt Sheffieldissä Englannissa toimiva tutkimusryhmä. Menetelmästä käytetään toisinaan lyhennettä APT, joka tulee sanoista *Applied Potential Tomography.* Esitetään algoritmi yksinkertaisessa geometriassa, kuten se kirjallisuudessakin yleensä esitetään.
Oletetaan siis, että tutkittava kappale on kaksiulotteinen poikkileikkauskappale. Yksinkertaisuuden vuoksi kappaletta mallinnetaan kiekolla, jonka säde skaalataan ykköseksi. Oletetaan, että impedanssijakauma γ on kiekossa $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ määritelty funktio, joka reunalla ∂D saa vakioarvon, $\gamma|_{\partial D} = \gamma_0 =$ vakio. Potentiaali u toteuttaa D:ssä yhtälön (1). Virtakuviona APT–menetelmässä käytetään kahden vierekkäisen elektrodin virtasyöttöä: Toisesta elektrodista ajetaan

virtaa sisään, toisesta otetaan sama virta ulos. Idealisaatio jatkuvaa elektrodimallia käyttäen tälle virtasyöttötyypille on

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial n} = -\pi \partial_\tau \delta_\omega. \tag{9}$$

Tässä δ_ω tarkoittaa reunapisteessä $\omega \in \partial D$ olevaa Diracin deltaa, ja derivaatta $\partial_\tau \delta_\omega$ merkitsee reunakäyrän tangentin suuntaista derivaattaa. Täsmällisemmin sanottuna, jos $\omega = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, ja ψ on reunalla $\partial D = S^1$ määritelty testifunktio, niin

$$\int_{\partial D} \psi(x) \partial_\tau \delta_\omega(x) dS(x) = \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \partial_\tau \delta_\omega(\theta) d\theta = -\psi'(\varphi).$$

Olkoon $u = u(x, \omega)$ yhtälön (1) ratkaisu reunaehdolla (9). APT–algoritmissa ei mitata suoraan jännitteitä elektrodeissa, vaan vierekkäisten elektrodien välistä jännite–eroa. Jännitettä ei kuitenkaan mitata virtaa syöttävistä elektrodeista. Idealisaatio tälle mittaukselle jatkuvaa mallia käyttäen on

$$\delta u(x, \omega) = \partial_\tau u(x, \omega),$$

joten datajoukko on

$$\mathcal{D} = \{\delta u(x, \omega) \mid x \in \mathbb{S}^1, \omega \in \mathbb{S}^1, x \neq \omega\}.$$

Aloitetaan tarkastelemalla potentiaalia u tapauksessa, jolloin johtavuus γ on vakio. Olkoon siis $u_0(x, \omega)$ funktio, jolle

$$\Delta u_0(x, \omega) = 0, \quad x \in D,$$

$$\gamma_0 \frac{\partial u_0}{\partial n}(x, \omega)\Big|_{\partial D} = -\pi \partial_\tau \delta_\omega.$$

Kyseessä on Laplacen yhtälön Neumannin ongelma, joka osataan ratkaista edellisen luvun Neumannin Greenin funktiota käyttäen. Greenin kaavaa soveltaen

$$\begin{aligned} u_0(y, \omega) &= \int_D \left(u_0(x, \omega) \Delta_x g_N(x, y) - g_N(x, y) \Delta u_0(x, \omega)\right) dx \\ &= \int_{\partial D} \left(u_0(x, \omega) \frac{\partial g_N}{\partial n(x)}(x, y) - g_N(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial n}(x) \right) dS(x), \end{aligned}$$

mihin sijoittamalla g_N:n ja u_0:n normaaliderivaatat saadaan

$$\begin{aligned} u_0(y, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} u_0(x, \omega) dS(x) - \pi \int_{\partial D} g_N(x, y) \partial_\tau \delta_\omega(x) dS(x) \\ &= \pi \partial_\tau g_N(\omega, y). \end{aligned}$$

Lasketaan eksplisiittisesti g_N:n tangentiaalinen derivaatta. Olkoon $\omega = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, ja merkitään $\omega^\perp = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Funktion $x \mapsto g_N(x, y)$ derivaatta x:n suhteen tangenttivektorin $\omega^\perp$ suuntaan on

$$\begin{aligned}\partial_\tau g_N(\omega, y) &= \omega^\perp \cdot \nabla_x g_N(x, y)|_{x=\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi}\omega^\perp \cdot \left(\frac{\omega - y}{|\omega - y|^2} + \frac{\omega - y^*}{|\omega - y^*|^2} \right).\end{aligned}$$

Tässä $\omega \cdot \omega^\perp = 0$ ja

$$|\omega - y^*|^2 = 1 - 2\frac{\omega \cdot y}{|y|^2} + \frac{1}{|y|^2} = \frac{|\omega - y|^2}{|y|^2},$$

eli saadaan

$$u_0(y, \omega) = -\frac{\omega^\perp \cdot y}{|\omega - y|^2}.$$

Käyttämällä kompleksista notaatiota lauseke tukee erityisen yksinkertaiseksi. Jos merkitään $z = y_1 + iy_2$ ja $w = \omega_1 + i\omega_2 = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, niin

$$-\omega^\perp \cdot y = \omega_2 y_1 - \omega_1 y_2 = \mathrm{Im}(w\overline{z}),$$

joten kirjoittamalla huolimattomasti $u_0(y, \omega) = u_0(z, w)$ on

$$\begin{aligned}u_0(z, w) &= \frac{\mathrm{Im}(w\overline{z})}{|w - z|^2} = \frac{\mathrm{Im}(w\overline{z})}{|1 - \overline{w}z|^2} \\ &= -\mathrm{Im}\left(\frac{1 - w\overline{z}}{|1 - \overline{w}z|^2} \right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\overline{w}z - 1} \right).\end{aligned}$$

Tämä lauseke antaa ratkaisulle geometrisen tulkinnan konformikuvauksia käyttäen. Jos merkitään

$$\zeta = \frac{1}{\overline{w}z - 1},$$

niin z ilmaistuna ζ:n avulla on

$$z = w\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right).$$

Tästä nähdään, että kun z on yksikkökiekon reunalla, niin

$$1 = |z|^2 = \left|1 + \frac{1}{\zeta}\right|^2 = \frac{|1 + \zeta|^2}{|\zeta|^2},$$

mistä seuraa

$$\mathrm{Re}\zeta = -\frac{1}{2}.$$

Siis kuvaus $z \mapsto \zeta$ on konformikuvaus, joka vie yksikkökiekon puolitasolle $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\zeta < -\frac{1}{2}\}$. Ekvipotentiaaliviivat $u_0(z, w)$ =vakio vastaavat suoria $\mathrm{Im}\zeta$ =vakio, eli reaaliakselin suuntaisia suoria ζ–tasossa. Sähkövirta, joka kulkee ekvipotentiaaliviivoja vastaan kohtisuoraan, noudattaa siten suorien $\mathrm{Re}\zeta$=vakio kuvaviivoja D:ssä. Näille virtaviivoille saadaan siten yhtälö

$$v_0(z, w) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\overline{w}z - 1}\right) = \text{vakio}.$$

Olkoon $u(z, w)$ kompleksista notaatiota käyttäen ilmaistu todellinen mitattu jännite, joka vastaa tuntematonta johtavuusjakaumaa kappaleen sisällä. Takaisinprojektioalgoritmissa ajatuksena on verrata mitattua jännitettä johonkin referenssimittaukseen $\delta u_{\mathrm{ref}}(z, w)$. Algoritmin tavoitteena on siten tuottaa *erotuskuvia*, jotka kuvaavat sähkönjohtavuuden muutosta. Referenssimittaukseksi voidaan esimerkiksi keuhkoja kuvattaessa ottaa mittaus keuhkot täysin tyhjennettyinä. Sydäntä tutkittaessa referenssimittaus voi olla jännite sydämen systolisessa vaiheessa. Algoritmin lähtödataksi valitaan suhteellinen jännite–eromuutos,

$$g(z, w) = \frac{\delta u(z, w) - \delta u_{\mathrm{ref}}(z, w)}{\delta u_{\mathrm{ref}}(z, w)}.$$

Tämän suhteelisen jännitemuutoksen käytön eräs idea on siinä, että mallintamatta jätettyjen elektrodien vaikutus rekonstruktioon pienenee.
Algoritmi perustuu seuraavaan heuristiseen ideaan: Tarkastellaan kuvapikseliä, joka sijaitsee pisteessä $x \in D$. Oletetaan, että johtavuusjakauma on referenssimittausta u_{ref} vastaava. Pisteen x ja syöttöpisteen ω kautta kulkee ekvipotentiaaliviiva, joka leikkaa reunan ∂D jossain pisteessä $s(x, w) \in \partial D$. Jos johtavuuden arvoa muutetaan pikselissä x, niin jännite pisteessä $s(x, w)$ ilmeisesti muuttuu. Kun syöttöpistettä kierretään ympäri D:n reunaa, niin myös piste $s(x, w)$ kiertää. Takaisinprojektioalgoritmissa pikseliin x liitettävä johtavuuden muutoksen estimaatti $\delta(x)$ lasketaan kaavalla

$$\delta(x) = \int_{\partial D} g(s(x, w), w)\Phi(x, w)dS(w). \tag{10}$$

Tässä funktio Φ on sopivasti valittu painofunktio, joka kiinnitetään myöhemmin. Kaavan (10) yhdennäköisyys Radon–muunnoksen takaisinprojektioon on varsin ilmeinen, ja ilmeisesti kaavan juuret ovatkin juuri tomografiassa. Kaavaan sisältyy eräs laskennallinen ongelma: Piste $s(x, w)$ osataan ratkaista, jos johtavuusjakauma referenssimittauksen aikana tunnetaan. Mutta myös tämä jakauma on lähes aina tuntematon, joten joudutaan tyytymään approksimaatioon. Tutkitaan siksi, missä piste s sijaitsee, jos referenssikappaleen johtavuus on vakio, $\gamma(x) = \gamma_0$. Tulee siis ratkaista s yhtälöistä

$$u_0(x, w) = u_0(s, w), \quad |s| = 1.$$

Olkoon $w = e^{i\varphi}$. Kirjoitetaan $s = e^{i\alpha}$ ja sijoitetaan u_0:n lausekkeeseen, jolloin saadaan yhtälö

$$u_0(x,w) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\overline{w}s - 1}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{e^{i(\alpha-\varphi)} - 1}\right).$$

Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{i(\alpha-\varphi)}-1} &= \frac{e^{-i(\alpha-\varphi)}-1}{|e^{i(\alpha-\varphi)}-1|^2} \\ &= \frac{\cos(\alpha-\varphi)-1}{2(1-\cos(\alpha-\varphi))} - i\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{2(1-\cos(\alpha-\varphi))},\end{aligned}$$

mistä saadaan trigonometrialla yhtälö

$$\begin{aligned}u_0(x,w) &= -\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{2(1-\cos(\alpha-\varphi))} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)}{2(1-(1-2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)))} \\ &= -\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}(\alpha-\varphi),\end{aligned}$$

eli pisteelle $s(x,w)$ saadaan approksimatiivinen lauseke

$$s(x,\omega) = e^{i\alpha}, \quad \alpha = \varphi - 2\mathrm{arccot}(2u_0(x,w)).$$

Tarkastellaan seuraavaksi painofunktion Φ valintaa. Painofunktion tarkoituksena on tasapainottaa kaavassa (10) laskettua keskiarvoa siten, että jokainen jännitemittaus tulee otetuksi mukaan painolla, joka vastaa mittauksen herkkyyttä johtavuuden muutokselle. Painofunktio valitaan seuraavalla periaatteella: Oletetaan aluksi, että kuvapikseli on kiekon D keskellä. Tällöin jokainen jännitemittaus on samanarvoisessa asemassa, joten postuloidaan

$$\Phi(0,w) = 1.$$

Koska keskipisteessä olevalle pikselille pätee $s(0,w) = -w$, saadaan siten

$$\delta(0) = \int_{\partial D} g(-w,w)dS(w) = i\oint_{|w|=1} g(-w,w)\frac{dw}{w}.$$

Olkoon sitten $x \in D$ mielivaltainen kuvapikseli. Määritellään konformikuvaus yksikkökiekolta D itselleen siten, että piste x kuvautuu kiekon keskipisteeseen. Tällainen kuvaus on

$$w = M(\zeta,x) = \frac{\zeta - x}{\overline{x}\zeta - 1}. \tag{11}$$

Kuvaus M deformoi johtavuusjakaumaa kiekossa D. Painofunktio Φ lasketaan käyttämällä heuristista ajatusta, että takaisinprojektioalgoritmin tulisi tuottaa pikselille x sama $\delta(x)$:n arvo, jonka se tuottaisi tälle deformoidulle johtavuusjakaumalle origossa. Niinpä tulee päteä

$$i\oint_{|w|=1} g(-w,w)\frac{dw}{w} = i\oint_{|\zeta|=1} g(s(\zeta,x),z)\Phi(x,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Tästä postulaatista paino voidaan helposti laskea. Pätee nimittäin

$$\begin{aligned}\frac{dw}{w} &= \left(\frac{1}{\overline{x}\zeta-1} - \frac{\overline{x}(\zeta-x)}{(\overline{x}\zeta-1)^2}\right)\frac{\overline{x}\zeta-1}{\zeta-x}d\zeta \\ &= \frac{|x|^2-1}{(\zeta-x)(\overline{x}\zeta-1)}d\zeta = \frac{1-|x|^2}{|\zeta-x|^2}\frac{d\zeta}{\zeta},\end{aligned}$$

eli painofunktiolle saatiin lauseke

$$\Phi(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|\zeta-x|^2}.$$

Tehdään vielä yhteenveto algoritmista.

Takaisinprojektioalgoritmi: Olkoon

$$\mathcal{D}_{\mathrm{ref}} = \{\delta u_{\mathrm{ref}}(x,\omega) \mid x\in\mathbb{S}^1, \omega\in\mathbb{S}^1, x\neq\omega\}$$

referenssimittausdata, joka vastaa (yleensä tuntematonta) referenssijohtavuutta γ_{ref}. Olkoon γ johtavuusjakauma, jota vastaa data

$$\mathcal{D} = \{\delta u(x,\omega) \mid x\in\mathbb{S}^1, \omega\in\mathbb{S}^1, x\neq\omega\}.$$

halutaan kuvantaa erotusta $\gamma-\gamma_{\mathrm{ref}}$.
Muodostetaan aluksi suhteellinen jännite-eromuutos,

$$g(z,w) = \frac{\delta u(z,w) - \delta u_{\mathrm{ref}}(z,w)}{\delta u_{\mathrm{ref}}(z,w)}.$$

Olkoon $x\in D$. Lasketaan pisteet $s(x,\omega)\in\partial D$ kaavalla

$$s(x,\omega) = e^{i\alpha}, \quad \alpha = \varphi - 2\mathrm{arccot}(2u_0(x,w)),$$

missä φ on ω:n suuntakulma. Johtavvuden muutosta kuvantava funktio δ lasketaan nyt kaavalla

$$\delta(x) = \int_{\partial D} g(s(x,\omega))\frac{1-|x|^2}{|\omega-x|^2}dS(\omega).$$

Huomautetaan, että funktiota δ ei voida pitää johtavuuseron $\gamma-\gamma_{\mathrm{ref}}$ estimaattina. Kyseessä on puhtaasti kuvantava algoritmi, ja informaatio johtavuuseroista saadaan visuaalisessa muodossa näkyviin.

Harjoitustehtäviä:

1. Osoita, että kuvaus (11) kuvaa yksikkökiekon itselleen, kun $x\in D$.

2. Laske APT–virtasyöttöä vastaavan potentiaalin herkkyysmatriisi $|\nabla u(x,\omega)|^2$, kun johtavuus on vakio γ_0.