2 Tomografiaa

Tomografialla tarkoitetaan yleisesti menetelmiä, joilla muodostetaan läpileikkauskuvia tutkittavasta kohteesta käyttämällä hyväksi kohteen vuorovaikutusta esim. säteilyn kanssa. Sana on johdannainen kreikankielen leikkausta merkitsevästä sanasta “tomos”.

Ennen itse asiaan menoa mainitaan tämän luvun merkinnöistä ja tarvittavista taustatiedoista. Luvussa edellytetään perustiedot Lebesguen integraalista. Merkinnät $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ ja $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tarkoittavat integroituvien, neliöintegroituvien ja rajoitettujen funktioiden luokkaa $\mathbb{R}^n$:ssä. Nopeasti vähenevien testifunktioiden luokkaa merkitään $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:llä. Funktion f Fourier–muunnosta merkitään $\hat{f}$:llä. Mainituista käsitteistä on koottu lyhyt yhteenveto Liitteeseen 2.

Johdantona aiheeseen tarkastellaan aluksi klassista röntgentomografiaongelmaa. Tavoitteena on muodostaa poikkileikkaiskuva kohteesta, esimerkiksi potilaan rintakehästä, kun kohdetta on valaistu röntgensäteillä eri suunnista ja on mitattu läpäisseen röntgensäteen intensiteetin vaimeneminen. Tilannetta voidaan mallintaa seuraavasti: Olkoon L kappaleen lävistävä suora, jota pitkin röntgensäde läpäisee kohteen. Olkoon I säteilyn intensiteetti pitkin tätä suoraa. Intensisteetti vaimenee suoraan verrannollisesti itseensä, kulkemaansa matkaan sekä kappaleen tiheyteen. Jos $\rho = \rho(x)$ on kappaleen tiheysjakauma, niin intensiteetin muutos infinitesimaalisella matkalla dl pitkin suoraa voidaan ilmaista kaavalla

$$dI = -I\rho dl.$$

Jos I_0 on alkuperäinen intensiteetti, saadaan vastaanotettu intensiteetti integroimalla,

$$-\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = \log(\frac{I_0}{I}) = \int_L \rho(x)dl.$$

Tomografiadata muodostuu siten tiheyden ρ integraaleista yli kappaleen lävistävien suorien. Inversio–ongelmana on rekonstruoida funktio ρ, kun sen integraalit yli suorien tunnetaan.

Muotoillaan edellä esitetty inversio–ongelma yleisesti $\mathbb{R}^n$:ssä. Käytännössä kysymykseen tulevat tapaukset $n = 2$ ja $n = 3$. Tapausta $n = 2$ sanotaan aksiaalitomografiaksi, jossa siis pyritään rekonstruoimaan viipalekuvia kappaleesta. Tästä ongelmasta käytetään toisinaan lyhennystä CAT–scan, englanninkielen sanoista Computerized Axial Tomography. Nykyisillä tomografialaitteilla voidaan muodostaa suoraan kolmiulotteinen rekonstruktio, josta voidaan katsella halutunsuuntaisia leikkauksia.

Olkoon P $\mathbb{R}^n$:n hypertaso, eli jokin $(n-1)$–ulotteinen taso $\mathbb{R}^n$:ssä . Tasot P voidaan parametrisoida seuraavasti: Merkitään $\mathbb{S}^{n-1}$:llä $\mathbb{R}^n$:n yksikköpalloa, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Valitaan yksikkövektori $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, joka on kohtisuorassa tasoa

P vasten. Jos $x_1, x_2 \in P$, niin

$$(x_1 - x_2) \cdot \omega = 0, \text{ eli } x_1 \cdot \omega = x_2 \cdot \omega = s \in \mathbb{R}.$$

Voimme siten parametrisoida hypertasojen joukon kirjoittamalla

$$P = P(\omega, s) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \cdot \omega = s\}.$$

Heti todetaan, että

$$P(\omega, s) = P(-\omega, -s).$$

Hypertasojen parametrisaatiota käyttäen voidaan nyt määritellä funktion *Radon–muunnos*. Merkitään $dx_\perp$:llä vektoria ω kohtisuorassa olevilla hypertasoilla määriteltyä $(n-1)$–ulotteista Lebesguen mittaa. Funktion f Radon-muunnos Rf määritellään kaavalla

$$Rf(s, \omega) = \int_{P(s,\omega)} f(x)\, dx_\perp = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(s\omega + x_\perp)\, dx_\perp, \tag{1}$$

milloin kyseinen integraali suppenee.

Tomografiaongelma, jota tässä luvussa tarkastellaan, voidaan nyt asettaa seuraavasti: Tulee rekonstruoida funktio f, kun tunnetaan data

$$\mathcal{R} = \{Rf(s, \omega) \,|\, s \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Tapauksessa $n = 2$ ongelma yhtyy luvun alussa esitettyyn röntgentomografiaongelmaan, kun funktioksi f valitaan kappaleen tiheysjakauma tasossa. Tapauksessa $n = 3$ ajatellaan, että kappaletta läpivalaistaan tasomaisella sädeviuhkalla, ja tason paikkaa ja orientaatiota voidaan muutella. Kolmiulotteinen ongelma voitaisiin myös muotoilla siten, että tasojen sijasta integraalit pitkin suoria ovat tiedossa.

Ennen inversio–ongelman lähempää tarkastelua luetellaan joitakin Radon–muunnoksen perusominaisuuksia. Seuraavassa lauseessa merkintä $\mathrm{supp} f$ tarkoittaa funktion f kantajaa, pienintä suljettua joukkoa, jonka ulkopuolella funktio häviää.

Lause 2.1 *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Funktion f Radon–muunnoksella on seuraavat ominaisuudet:*

1. *Kaikilla $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ funktio $s \mapsto Rf(s, \omega) = R_\omega f(s)$ on äärellinen melkein kaikilla $s \in \mathbb{R}$, ja $R_\omega f \in L^1(\mathbb{R})$.*

2. *Jos $\mathrm{supp} f \subset \overline{B_M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq M\}$, niin $\mathrm{supp} R_\omega f \subset [-M, M]$.*

3. *$Rf(-s, -\omega) = Rf(s, \omega)$.*

4. Jos $D_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq n$, niin $R_\omega f(s)$ on derivoituva, ja

$$\frac{\partial}{\partial s} Rf(s,\omega) = \omega \cdot R(\nabla f)(s,\omega) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j R(D_j f)(s,\omega).$$

5. Jos $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin

$$sRf(s,\omega) = \omega \cdot R(xf)(s,\omega) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j R(x_j f)(s,\omega).$$

Lauseen todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Edellisestä lauseesta seuraa erityisesti Radon–muunoksen kuvausominaisuus.

Seuraus 2.1 *Radon–muunnos on rajoitettu kuvaus*

$$R : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}).$$

Vastaavasti, kiinteällä $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$R_\omega : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Edellä esiintyvän avaruuden $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$ määritelmässä integrointi suoritetaan luonnollisesti $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ tulomitan suhteen.

Ryhdytään nyt tutkimaan kysymystä, määrääkö funktion Radon–muunnos funktion itsensä yksikäsitteisesti. Seuraava lause todistetaan nopeasti vähenevien funktioiden luokassa, mutta kuten helposti näkee, pätee tulos yleisemmin esimerkiksi luokassa $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lause 2.2 *Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin pätee identiteetti*

$$\widehat{R_\omega f}(\tau) = (2\pi)^{n-1} \hat{f}(\tau\omega). \tag{2}$$

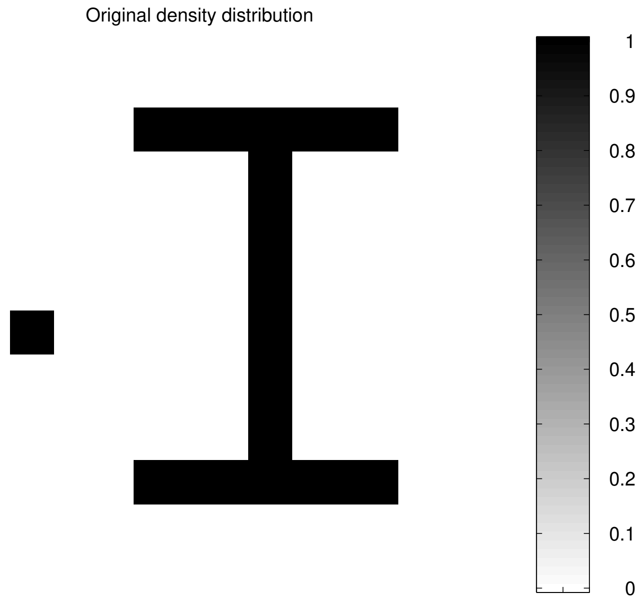
Erityisesti $\hat{f}$ ja siten funktio f itse määräytyy yksikäsitteisesti Radon–muunnoksestaan.

Edellisessä lauseessa yhtälön (2) vasen puoli merkitsee siis funktion $s \mapsto R_\omega f(s)$ yksiuloitteista Fourier-muunnosta pisteessä τ,

$$\widehat{R_\omega f}(\tau) = \mathcal{F}_1(R_\omega f)(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau s} R_\omega f(s) ds,$$

kun taas oikea puoli viittaa f:n n–uloitteeseen muunnokseen pisteessä $\xi = \tau\omega \in \mathbb{R}^n$, eli

$$\hat{f}(\tau\omega) = \mathcal{F}_n(f)(\tau\omega) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\tau\omega\cdot x} f(x) dx.$$



Kuva 1. Alkuperäinen tiheysjakauma. Tiheys saa joko arvon 1 (tummat alueet) tai arvon 0 (vaaleat alueet).

Todistus: Edellä esitetyn lauseen nojalla yhtälön molemmat puolet ovat hyvin määritellyt, ja

$$\begin{aligned}\widehat{R_\omega f}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\tau} R_\omega f(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-is\tau} f(s\omega + x_\perp)\, dx_\perp\, ds.\end{aligned}$$

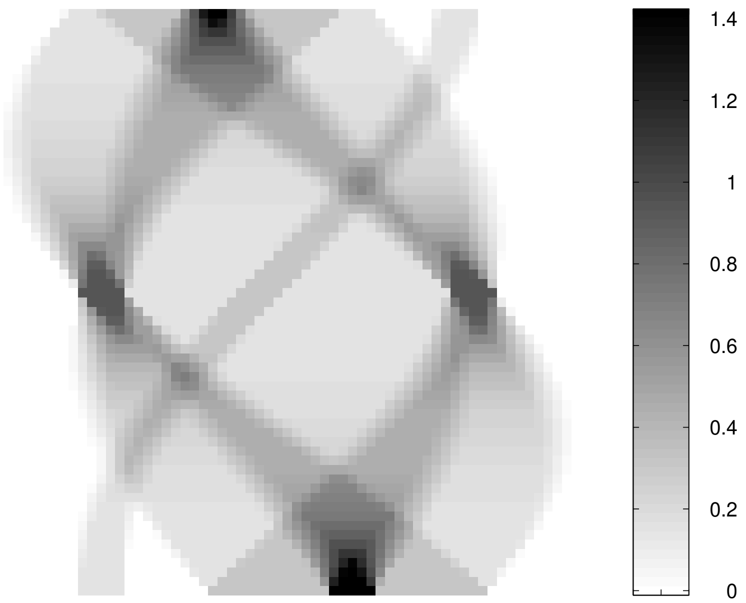
Kun merkitään $x = s\omega + x_\perp$, on $dx_\perp ds = dx$, ja $x \cdot \omega = s$. Siis

$$\widehat{R_\omega f}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(\tau\omega)} f(x) dx = (2\pi)^{n-1}\hat{f}(\tau\omega),$$

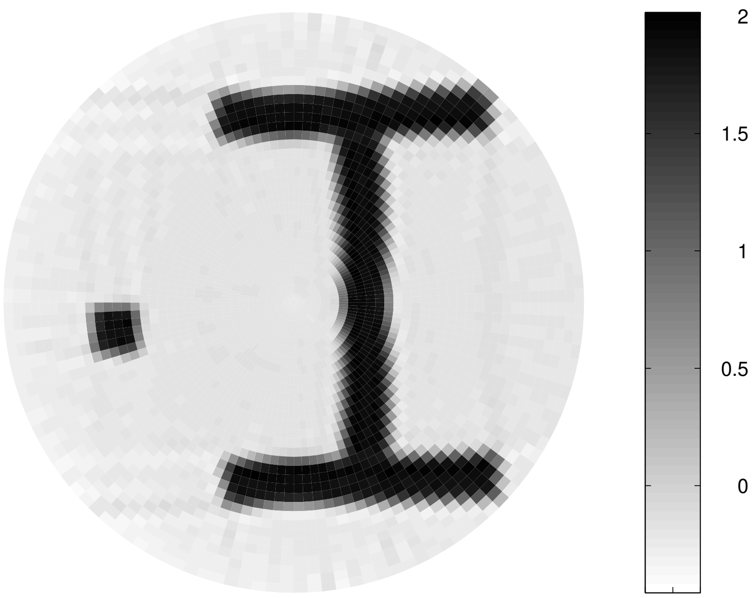
kuten väitettiin. □

Edellinen lause antaa itse asiassa myös tavan laskea Radon–muunnoksen käänteismuunnos. Kuvassa 1 on esitetty yksinkertainen kaksiulotteinen tiheysjakauma. Tätä tiheyttä vastaava Radon–muunnos on laskettu ja esitetty graafisesti kuvassa 2. Pystyakseli on yksikkövektorin ω suuntakulma välillä $[0, \pi[$, vaaka–akseli on parametri s. Tästä datasta on laskettu edellisen lauseen tulosta käyttäen rekonstruktio, joka on esitetty kuvassa 3. Lopputuloksessa on runsaasti kohinaa johtuen lähinnä melko karkeista integraalien approksimaatiokaavoista, joita laskussa on käytetty.

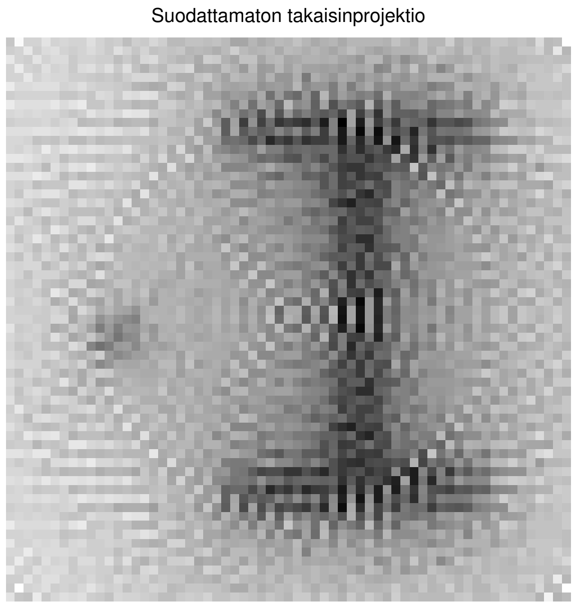
Täydellisemmän kuvan saamiseksi tomografia–alasta käsitellään joitaikin muita käänteiskaavoja. Esitetään aluksi ns. *takaisinprojektiomenetelmä (eng. back–*



Kuva 2. Kuvan 1 tiheysjakauman Radon–muunnos.



Kuva 3. Kuvassa 2 esitettyä dataa käyttämällä laskettu rekonstruktio, joka approksimoi kuvan 1 tiheysjakaumaa. Rekonstruktio on laskettu Lauseen 2.2 antamalla rekonstruktiokaavalla.



Kuva 4. Kuvassa 2 esitettyä dataa käyttämällä laskettu ns. suodattamaton takaisinprojektio R^*Rf.

projection method). Lähtökohtana on Radon–muunnoksen *liittomuunnos* R^*. Olkoon $g : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, ja oletetaan, että $|g(s, \omega)| \leq M$ jollain vakiolla $M > 0$. Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ mielivaltainen. Määritellään

$$R^*g(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(x \cdot \omega, \omega) d\omega.$$

Tässä $d\omega$ merkitsee pallon $\mathbb{S}^{n-1}$ pintamittaa. Todetaan, että R^*g on hyvin määritelty kaikkialla, sillä

$$|R^*g(x)| \leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |g(x \cdot \omega, \omega)| d\omega \leq M|\mathbb{S}^{n-1}| < \infty.$$

Tässä $|\mathbb{S}^{n-1}| = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\omega$ on yksikköpallon pintamitta.

Kun R^* sovelletaan Radon–muunnokseen $g(s, \omega) = Rf(s, \omega)$, ovat kaavan integrandin arvot f:n integraaleja otettuina yli kaikkien tasojen, jotka kulkevat x:n kautta. Siis operaattori R^* summaa yhteen kaikki ne Radon–muunnoksen arvot, joiden odotetaan riippuvan f:n arvosta pisteessä x. Niinpä $R^*Rf(x)$:n voisi olettaa riippuvan voimakkaimmin f:n arvosta juuri x:ssä ja heikommin muista arvoista. Ennen kuin ryhdytään analysoimaan saadun funktion riippuvuutta funktiosta f, tehdään numeerinen koe. Lasketaan funktio R^*Rf Kuvassa 2 esitetystä datasta. Kuvassa 4 on esitetty saatu tulos. Nähdään, että R^*Rf on jo sellaisenaan jonkinlainen rekonstruktio funktiosta f.

Ennen seuraavaa lemmaa määritellään funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *Rieszin potentiaali* $\mathcal{J}_\delta f$, $\delta > 0$, kaavalla

$$\mathcal{J}_\delta f(x) = \int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^{n-\delta}} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Todetaan, että Rieszin potentiaali on hyvin määritelty: Siirrytään $\mathbb{R}^n$:n napakoordinaatteihin, $\xi = \tau\omega$, missä $\tau = |\xi|$ ja $\omega = (1/|\xi|)\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, saadaan

$$\left| \int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^{n-\delta}} \hat{f}(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\hat{f}(\tau\omega)| \tau^{\delta-1} d\omega d\tau < \infty,$$

sillä $\tau \mapsto \hat{f}(\tau\omega)$ on nopeasti vähenevä funktio kaikissa suunnissa ω.

Lemma 2.1 *Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin*

$$R^*Rf(x) = 2^n \pi^{n-1} \mathcal{J}_1 f(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

Todistus: Napakoordinaatteihin siirtymällä

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 f(x) &= \int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^{n-1}} \hat{f}(\xi) d\xi \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{ix\cdot(\tau\omega)} \hat{f}(\tau\omega) d\omega d\tau,
\end{aligned}$$

missä $\xi = \tau\omega, \tau \geq 0$, $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Edellisen lauseen nojalla saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 f(x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{ix\cdot(\tau\omega)} \widehat{R_\omega f}(\tau) d\omega d\tau \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{ix\cdot(\tau\omega)} \widehat{R_\omega f}(\tau) d\tau \right) d\omega
\end{aligned}$$

Edellä käytimme hyväksi Radon–muunnoksen symmetriaominaisuutta $Rf(-s, -\omega) = Rf(s, \omega)$, josta seuraa

$$\widehat{R_{-\omega} f}(-\tau) = \widehat{R_\omega f}(\tau).$$

Mutta nyt nähdään, että

$$\mathcal{J}_1 f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} R_\omega f(x\cdot\omega) d\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} R^*Rf(x),$$

kuten väitettiin. $\square$

Muodollisesti laskien saadusta kaavasta voitaisiin helposti laskea itse f. Rieszin potentiaalin määritelmän nojalla olisi luonnollista olettaa, että $\mathcal{J}_1^{-1} = \mathcal{J}_{2n-1}$, sillä

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{2n-1}\mathcal{J}_1 f(x) &= \int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^{n-(2n-1)}}\widehat{\mathcal{J}_1 f}(\xi)d\xi \\ &= \int e^{ix\cdot\xi}|\xi|^{n-1}\widehat{\mathcal{J}_1 f}(\xi)d\xi \\ &= \int e^{ix\cdot\xi}|\xi|^{n-1}\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{n-1}}d\xi = f(x).\end{aligned}$$

Esitetty päättely osoittautuu oikeaksi. Teknisenä hankaluutena tässä laskussa on kuitenkin se, että yleensä $\mathcal{J}_1 f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, eikä Fourier–muunnosta voida siksi L^1–teorian puitteissa laskea. Tavalliseen tapaan lasku kuitenkin onnistuu, mikäli painotamme ensin funktiota $\mathcal{J}_1$ sopivalla katkaisufunktiolla, jonka annetaan lopuksi mennä kohti ykköstä. Olkoon siksi φ jokin nopeasti vähenevä testifunktio, jolle pätee

$$\varphi(0) = \int \hat{\varphi}(\xi)d\xi = 1.$$

Olkoon $M > 0$, ja merkitään $\varphi_M(x) = \varphi(M^{-1}x)$. Tällöin siis $\lim_{M\to\infty}\varphi_M(x) = 1$. Näitä merkintöjä käyttäen todistetaan seuraava tulos.

Lause 2.3 *Funktio $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ saadaan rekonstruoiutua Radon–muunnoksestaan kaavalla*

$$f(x) = \frac{1}{2^n\pi^{n-1}}\mathcal{J}_{2n-1}(R^*Rf)(x),$$

missä Rieszin potentiaali $\mathcal{J}_{2n-1}$ tulkitaan lasketuksi raja–arvona

$$\mathcal{J}_{2n-1}g(x) = \lim_{M\to\infty}\mathcal{J}_{2n-1}(\varphi_M g)(x).$$

Todistus: Edellisen lauseen nojalla riittää osoittaa, että jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\lim_{M\to\infty}\mathcal{J}_{2n-1}(\varphi_M\mathcal{J}_1 f)(x) = f(x).$$

Todetaan ensin, että $\varphi_M\mathcal{J}_1 f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, joten kyseinen integraali on hyvin määritelty. Nimittäin kaikilla multi–indekseillä α pätee

$$|D^\alpha\mathcal{J}_1 f(x)| \le \int \frac{\xi^\alpha}{|\xi|^{n-1}}|\hat{f}(\xi)|d\xi < \infty,$$

joten $\mathcal{J}_1 f$ on C^∞–funktio. Nopea vähenevyys äärettömyydessä seuraa puolestaan siitä, että φ_M on nopeasti vähenevä.

Lasketaan aluksi funktion $\varphi_M \mathcal{J}_1 f$ Fourier–muunnos. Määritelmän mukaan pätee

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi_M \mathcal{J}_1 f)(\xi) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\xi\cdot x}\varphi_M(x)\left(\int \frac{e^{ix\cdot\eta}}{|\eta|^{n-1}}\hat{f}(\eta)d\eta\right)dx \\ &= \int \frac{\hat{f}(\eta)}{|\eta|^{n-1}}\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i(\xi-\eta)\cdot x}\varphi_M(x)dx\right)d\eta,\end{aligned}$$

missä integrointijärjestyksen vaihto on suoritettu Fubinin lauseeseen nojaten. Sisempi integraali voidaan ilmaista funktion φ Fourier–muunnoksen avulla. Yksinkertainen muuttujanvaihto antaa nimittäin

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-i(\xi-\eta)\cdot x}\varphi_M(x)dx &= M^n\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{-iM(\xi-\eta)\cdot x}\varphi(x)dx \\ &= M^n\hat{\varphi}(M(\xi-\eta)).\end{aligned}$$

Näin ollen saadaan kaava

$$\mathcal{J}_{2n-1}(\varphi_M \mathcal{J}_1 f)(x) = \int e^{ix\cdot\xi}|\xi|^{n-1}\left(\int M^n\hat{\varphi}(M(\xi-\eta))\frac{\hat{f}(\eta)}{|\eta|^{n-1}}d\eta\right)d\xi.$$

Tehdään sisempään integraaliin muuttujanvaihto $\zeta = \xi - \eta$. Tällöin integraali saa muodon

$$\mathcal{J}_{2n-1}(\varphi_M \mathcal{J}_1 f)(x) = \int\int e^{ix\cdot\xi}\frac{|\xi|^{n-1}}{|\xi-\zeta|^{n-1}}\hat{f}(\xi-\zeta)M^n\hat{\varphi}(M\zeta)d\zeta d\xi,$$

mistä edelleen muuttujanvaihdolla

$$\mathcal{J}_{2n-1}(\varphi_M \mathcal{J}_1 f)(x) = \int\int e^{ix\cdot\xi}\frac{|\xi|^{n-1}}{|\xi-M^{-1}\zeta|^{n-1}}\hat{f}(\xi-M^{-1}\zeta)\hat{\varphi}(\zeta)d\zeta d\xi.$$

Kun tässä integraalissa annetaan M:n kasvaa rajatta, niin Lebesguen dominoidun konvergenssin lause antaa rajalla integraalin

$$\lim_{M\to\infty}\mathcal{J}_{2n-1}(\varphi_M \mathcal{J}_1 f)(x) = \int\int e^{ix\cdot\xi}\frac{|\xi|^{n-1}}{|\xi|^{n-1}}\hat{f}(\xi)\hat{\varphi}(\zeta)d\zeta d\xi = f(x),$$

sillä funktion $\hat{\varphi}$ integraali antaa ykkösen. $\square$

Seuraavaksi on tarkoitus tutkia tapauksia $n = 3$ ja $n = 2$ lähemmin.

Harjoitustehtäviä:

1. Osoita, että Radon–muunnoksella on Lauseessa 2.1 luetellut ominaisuudet.

2. Tarkastellaan akustista aaltoa $\mathbb{R}^2$:ssa. Olkoon $p = p(x,t)$ paine (skalaari) ja $v = v(x,t)$ siirtymänopeus (vektori). Tällöin kentät sopivasti normitettuina toteuttavat yhtälöt
$$\nabla \cdot v = \partial_t p, \quad \nabla p = \partial_t p.$$
Osoita, että p toteuttaa aaltoyhtälön
$$\Delta p = \partial_t^2 p.$$
Merkitään Radon–muunnettuja kenttiä $\tilde{p}(s,\omega) = Rp(s,\omega)$, $\tilde{v}(s,\omega) = Rv(s,\omega)$. Osoita, että näille pätee
$$\omega \cdot \partial_s \tilde{p} = \partial_t \tilde{p}, \quad \omega \partial_s \tilde{p} = \partial_t \tilde{v}.$$
Kirjoitetaan yhtälöt muotoon
$$\partial_s MX = \partial_t X, \quad X = \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix}.$$
Mikä on matriisi M? Laske M:n ominaisarvot ja –vektorit. Kirjoita differentiaaliyhtälöt M:n ominaisvektoreille.

3. Laske funktion
$$f(x) = e^{-|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$
Radon–muunnos.

4. Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Radon–muunnos on annettu kaavalla
$$Rf(s,\omega) = e^{-|s+a\cos\varphi|^2}, \quad \omega = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$
Ratkaise funktio f käyttämällä Lausetta 2.2. (Liitteen 2 Lemmasta L1 saattaa olla iloa.)

2.1 Radonin kaava $\mathbb{R}^3$:ssa

Katsotaan aluksi, miltä $\mathcal{J}_1$ näyttää, kun $n = 3$. Olkoon funktio ψ_ε määritelty kuten Liitteessä 2, $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(\varepsilon^{-1}x)$, missä $\varepsilon > 0$ ja $\psi(x) = (2\pi)^{n/2}e^{-|x|^2/2}$.

Tällöin pätee $\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) = \widehat{\psi}(\varepsilon\xi) = e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/2}$, kuten liitteessä osoitettiin. Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Selvästi dominoidun konvergenssin lauseen nojalla pätee

$$\mathcal{J}_1 f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2} \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Mutta

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2} \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi &= \int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2} \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{-i\xi\cdot y} f(y) dy d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int f(y) \left(\int \frac{e^{i\xi\cdot(x-y)}}{|\xi|^2} \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) d\xi \right) dy \\
&= \int f(y) k_\varepsilon(x-y) dy
\end{aligned}$$

Fubinin lauseen nojalla. Lasketaan ξ-integraali napakoordinaateissa. Valitaan ξ-koordinaatisto siten, että ξ_3–akseli on $(x-y)$–vektorin suuntainen, jolloin

$$\begin{aligned}
k_\varepsilon(x-y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{e^{i\xi\cdot(x-y)}}{|\xi|^2} \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^\infty dt e^{it|x-y|\cos\theta} e^{-\varepsilon^2 t^2/2} \sin\theta
\end{aligned}$$

Muuttujanvaihdolla $u = \cos\theta$ saadaan

$$\begin{aligned}
k_\varepsilon(x-y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 2\pi \int_{-1}^{1} du \int_0^\infty dt e^{it|x-y|u} e^{-\varepsilon^2 t^2/2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty \frac{e^{it|x-y|} - e^{-it|x-y|}}{it|x-y|} e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|x-y|} \int_0^\infty \frac{\sin(t|x-y|)}{t} e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt.
\end{aligned}$$

Merkitään tässä lausekkeessa esiintyvää integraalia g_ε:illa,

$$g_\varepsilon(s) = \int_0^\infty \frac{\sin ts}{t} e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt$$

Derivoimalla integraalimerkin alla saadaan derivaatalle integraaliesitys

$$\begin{aligned}
g'_\varepsilon(s) &= \int_0^\infty \cos ts e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{its} e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt + \int_0^\infty e^{-its} e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{its} e^{-\varepsilon^2 t^2/2} dt
\end{aligned}$$

Käyttämällä Liitteeessä 2 johdettuja integraalikaavoja saadaan tästä edelleen tulos

$$g'_\varepsilon(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\varepsilon} e^{-s^2/(2\varepsilon^2)}.$$

Funktio g_ε saadaan siten integroimalla tämä yhtälö:

$$g_\varepsilon(s) = g_\varepsilon(0) + \int_0^s g'_\varepsilon(t)dt = g_\varepsilon(0) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2\varepsilon} \int_0^s e^{-t^2/(2\varepsilon^2)} dt.$$

Funktion g_ε määritelmästä nähdään, että $g_\varepsilon(0) = 0$. Muuttujanvaihdolla saadaan siten

$$g_\varepsilon(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_0^{s/\varepsilon} e^{-t^2/2} dt.$$

Erityisesti, kun $s > 0$, pätee

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} g_\varepsilon(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Sijoitetaan saatu esitys k_ε:in lausekkeeseen, jolloin saadaan

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} k_\varepsilon(x-y) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|x-y|} g_\varepsilon(|x-y|) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}.$$

Radonin kaava dimensiossa $n = 3$ on siten esitettävissä muodossa

$$R^*Rf(x) = 8\pi^2 \mathcal{J}_1 f(x) = 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy. \tag{3}$$

Saatu kaava näyttää, että liitomuunnoksella R^* operointi f:n Radon–muunokseen todella tuottaa integraalioperaattorin, joka painottaa funktiota f pisteessä x.

Itse asiassa saatu tulos osoittaa, että operaattori R^*R on vakiota vaille Laplace–operaattorin käänteisoperaattori $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$:ssa, eli Laplace–operaattorin *Greenin funktio*. Selvästi nimittäin pätee

$$\mathcal{J}_5 f(x) = \int e^{ix\cdot\xi} |\xi|^2 \hat{f}(\xi) d\xi = \int e^{ix\cdot\xi} (-\widehat{\Delta f}) d\xi = -\Delta f(x),$$

missä Δ on Laplace–operaattori,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Formuloidaan saatu tulos $\mathbb{R}^3$:ssa erilliseksi lauseeksi.

Lause 2.4 *Funktio $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ saadaan Radon–muunnoksestaan yhtälöllä*

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta R^*Rf(x).$$

Harjoitustehtäviä:

1. Laske kaavan (3) vastine $\mathbb{R}^2$:ssa määrittelemällä

$$\mathcal{J}_1 f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\xi \cdot x}}{|\xi|} e^{-\varepsilon|\xi|} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

   (Vihje: tiedosta

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - ir\cos\theta} d\theta = 2\pi \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad a, r > 0,$$

   voi olla iloa.)

2. Laske funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^n}, \quad n \geq 2,$$

   Radon–muunnos.

2.2 Tason tomografiaa

Tutkitaan vielä yksityiskohtaisemmin tomografiaongelmaa $\mathbb{R}^2$:ssa. Tasossa voidaan käyttää Fourier–sarjaesityksiä funktioille. Tätä kautta johdetaan tunnettu *McCormickin inversiokaavan* nimellä tunnettu yhteys funktion ja sen Radon–muunnoksen välille.

Tason Radon–muunnokset lasketaan integraaleina suorien yli. Parametrisoidaan aluksi tason suorat niiden suuntakulman avulla. Olkoon $\omega \in \mathbb{R}^2$, $|\omega| = 1$. Tällöin ω voidaan esittää muodossa

$$\omega = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Vektoria ω kohtisuorassa oleva suora (eli hypertaso) $P(\omega, s)$ voidaan nyt esittää muodossa

$$P(\omega, s) = \{x = s\omega + t\omega_\perp \,|\, t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\omega_\perp$ on vektoria ω vastaan kohtisuorassa oleva yksikkövektori. Kiinnitetään $\omega_\perp$ valitsemalla

$$\omega_\perp = (-\sin\varphi, \cos\varphi).$$

Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Parametrisoidaan f:n Radon–muunnos tasokulman φ ja etäisyysparametrin s avulla kirjoittamalla

$$g(s, \varphi) = Rf(s, \varphi) = \int_{P(\omega,s)} f(x) dx_\perp = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\omega + t\omega_\perp) dt.$$

Funktioiden f ja g välinen riippuvuus voidaan ilmaista niiden Fourier–kertoimien avulla. Olkoot r ja θ tason napakoordinaatit. Esitetään funktio f Fourier–sarjana kulmamuuttujan θ suhteen, Fourier–sarjana esitettynä

$$f(r,\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(r) e^{im\theta}.$$

Vastaavalla tavalla voidaan Radon–muunnos g kehittää suuntakulman φ suhteen Fourier–sarjaksi,

$$g(s,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{g}_m(s) e^{im\varphi}.$$

Johdetaan seuraavaksi yhteys kertoimien $\hat{f}_m(r)$ ja $\hat{g}_m(s)$ välille. Tätä varten määritellään perhe polynomeja, ns. *Tšebysheffin ensimmäisen lajin polynomit* T_n. Olkoon $x \in [-1,1]$. Määritellään kulmamuuttuja ψ kaavalla

$$\psi = \arccos x \in [0,\pi].$$

Funktio T_n, $n = 0,1,2,\ldots$ määritellään nyt kaavalla

$$T_n(x) = \cos(n\psi). \tag{4}$$

Osoittautuu, että funktio $T_n(x)$ on itse asiassa x:n n:nnen kertaluvun polynomi. Funktiot T_n toteuttavat rekursiivisen kaavan

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0. \tag{5}$$

Tarvitsemme myöhemmin myös parillisuusominaisuutta

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x). \tag{6}$$

Tšebysheffin polynomeja koskevat väitteet jätetään harjoitustehtäviksi.

Seuraava lemma antaa eksplisiittisen kaavan suoralle ongelmalle, miten kertoimet $\hat{g}_m$ määrätään kertoimista $\hat{f}_m$.

Lause 2.5 *Kertoimet $\hat{g}_m$ saadaan lasketuksi kaavasta*

$$\hat{g}_m(s) = 2\int_s^{\infty} \hat{f}_m(t) \frac{T_{|m|}(\frac{s}{t})}{\sqrt{1-(\frac{s}{t})^2}} dt$$

Todistus: Olkoon $x \in P(s,\omega)$, jolloin x on muotoa

$$x = s\omega + t\omega_\perp,\ t \in \mathbb{R}.$$

Radon–muunnosta laskettaessa on siis t integroimismuuttuja. Otetaan uudeksi integroimismuuttujaksi vektoreiden x ja ω välinen kulma. Jos x napakoordinaateissa kirjoitettuna on

$$x = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

niin x:n ja ω:n pistetulolle saadaan esitys

$$s = x \cdot \omega = r(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi) = r\cos(\theta - \varphi).$$

Otetaan nyt uudeksi t:n korvaavaksi muuttujaksi

$$\psi = \theta - \varphi.$$

Jos rajoitutaan aluksi tapaukseen $s > 0$, niin geometrisesti todetaan, että x ja ω ovat samalla puolella origoa, joten $-\pi/2 < \psi < \pi/2$. Vastaavasti trigonometrialla saadaan t:n ja ψ:n välille yhteys

$$\frac{t}{s} = \tan\psi.$$

Tästä puolittain differentioimalla saadaan

$$dt = sD(\tan\psi) = \frac{s}{\cos^2\psi}d\psi.$$

Nyt f:n Radon–muunnos voidaan laskea napakoordinaattiesitystä käyttäen. Pätee

$$g(s,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\omega + t\omega_\perp)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{s}{\cos\psi}, \psi + \varphi)\frac{s}{\cos^2\psi}d\psi.$$

Sijoitetaan tähän Fourier–sarjaesitys, jolloin

$$g(s,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \hat{f}_m(\frac{s}{\cos\psi})e^{im\psi}\frac{s}{\cos^2\psi}d\psi.$$

Vertaamalla saatua esitystä g:n Fourier–sarjaesitykseen todetaan, että

$$\hat{g}_m(s) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \hat{f}_m(\frac{s}{\cos\psi})e^{im\psi}\frac{s}{\cos^2\psi}d\psi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{f}_m(\frac{s}{\cos\psi})\cos m\psi\frac{s}{\cos^2\psi}d\psi$$

kosinin parillisuuden nojalla.

Määritellään vielä uusi integroimismuuttuja

$$q = \frac{s}{\cos\psi}, \quad \psi = \arccos(\frac{s}{q}),\ s \le q,$$

jolloin

$$d\psi = \frac{s}{q\sqrt{q^2 - s^2}}dq.$$

Kun kulma ψ kasvaa nollasta $\pi/2$:een, niin q vaihtelee välillä s:stä äärettömään. Siten sijoittamalla uusi muuttuja $\hat{g}_m$:n kaavaan saadaan

$$\begin{aligned}\hat{g}_m(s) &= 2\int_s^\infty \hat{f}_m(q)\cos(m\arccos(\frac{s}{q}))\frac{s}{q\sqrt{(q^2-s^2)}}\frac{q^2}{s}dq \\ &= 2\int_s^\infty \hat{f}_m(q)\frac{T_{|m|}(\frac{s}{q})}{\sqrt{(1-(\frac{s}{g})^2)}}dq.\end{aligned}$$

Täten väite on todistettu, kun $s > 0$. Tapaus $s < 0$ hoidetaan Radon–muunnoksen parillisuusominaisuutta käyttäen. Identiteetti

$$Rf(s,\omega) = Rf(-s,-\omega)$$

tason napakoordinaateissa kirjoitettuna nimittäin implikoi

$$g(s,\varphi) = g(-s,\varphi+\pi). \tag{7}$$

Fourier–sarjaesitystä käyttäen

$$g(s,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{g}_m(s)e^{im\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{g}_m(-s)e^{im(\varphi+\pi)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\hat{g}_m(-s)e^{im\varphi},$$

eli

$$\hat{g}_m(s) = (-1)^m\hat{g}_m(-s). \tag{8}$$

Käyttämällä saatua esityskaavaa positiivisille s:n arvoille ja Tšebysheffin polynomien vastaavaa parillisuusominaisuutta todetaan, että väite on voimassa myös, kun $s < 0$. □

Mainitaan pienenä reunahuomautuksena, että symmetriaominaisuus (7) sanoo itse asiassa, että tason Radon–muunnos napakoordinaateissa kirjoitettuna voidaan tulkita Möbiuksen nauhalla määritellyksi funktioksi. Tämä seikka näkyy selvästi Radon–muunnettujen funktioiden kuvaajissa.

Toinen, Radon–muunoksen määritelmästäkin ilmeinen seikka näkyy saadusta kaavasta, nimittäin se, että Radon–muunnoksen arvo pisteessä (s,φ) riippuu vain funktion f arvoista pallon $B_s = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < s\}$ ulkopuolella. Epätriviaalimpi tulos sen sijaan on että myös käänteinen tulos on voimassa: Funktio f voidaan pisteessä x rekonstruoida Radon–muunnoksensa arvoista pisteissä $s \geq |x|$. Sen todistamiseksi johdetaan eksplisiittinen käänteiskaava $\hat{g}_m \longrightarrow f_m$.

Tällaisen kaavan johtamiseksi käytetään taas hieman Fourier–analyysiä. Lähdetään liikkeelle identiteetistä (2) Lauseessa 2.2,

$$\widehat{R_\omega f}(\tau) = 2\pi\hat{f}(\tau\omega). \tag{9}$$

Soveltamalla Fourier–käänteismuunnosta saadaan lauseke f:lle Radon–muunnoksensa avulla ilmaistuna. Jatkokäsittelyä silmällä pitäen kirjoitetaan Fourier–käänteismuunnos sopivaa regularisoivaa funktoita apuna käyttäen. Määritellään tällä kertaa integraali $I_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, kaavalla

$$I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Kun f on nopeasti vähenevä funktio, niin Legesguen dominoidun konvergenssin lausetta käyttäen nähdään, että

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) = f(x).$$

Sijoitetaan tähän integraaliin kaava (9), jolloin saadaan napakoordinaatteihin siirtymällä

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|} \widehat{R_\omega f}(\tau) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} e^{i\tau x\cdot\omega} e^{-\varepsilon\tau} \widehat{R_\omega f}(\tau) d\varphi \right) \tau d\tau.$$

Sijoitetaan tähän lausekkeeseen integraali

$$\widehat{R_\omega f}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau s} g(s,\varphi) ds,$$

jolloin saadaan integraali

$$I_\varepsilon(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} e^{i\tau x\cdot\omega} e^{-\varepsilon\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau s} g(s,\varphi) ds \right) d\varphi \right) \tau d\tau.$$

Fubinin lauseen nojalla integrointijärjestystä voidaan vaihtaa. Lasketaan saadussa integraalissa aluksi τ–integraali, jolloin

$$I_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} K(s,\varphi) g(s,\varphi) d\varphi \right) ds,$$

missä

$$K(s,\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty e^{(ix\cdot\omega - is - \varepsilon)\tau} \tau d\tau.$$

Ytimen K parametrinen riippuvuus ε:ista on jätetty tässä merkitsemättä näkyviin. Käyttämällä identiteettiä $iD_s e^{-is\tau} = \tau e^{-is\tau}$ saadaan edelleen

$$K(s,\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 iD_s \int_0^\infty e^{(ix\cdot\omega - is - \varepsilon)\tau} d\tau = -i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 D_s \frac{1}{ix\cdot\omega - is - \varepsilon}.$$

Derivaatta voitaisiin laskea eksplisiittisesti. Jätetään K:in lauseke kuitenkin toistaiseksi tähän muotoon, ja sijoitetaan sen sijaan g:n Fourier–sarjaesitys saatuun integraaliin, jolloin

$$I_\varepsilon(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{im\varphi} K(s,\varphi) d\varphi \right) \hat{g}_m(s) ds$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{im\varphi}((K(s,\varphi) + (-1)^m K(-s,\varphi))d\varphi \right) \hat{g}_m(s) ds,$$

missä käytettiin $\hat{g}_m$:n ominaisuutta (8).

Tarkastellaan sisäintegraalia vielä erikseen. Kirjoitetaan $x \cdot \omega = r\cos(\varphi - \theta)$. Valitsemalla uudeksi integroimismuuttujaksi $\psi = \varphi - \theta$ edellinen integraali antaa

$$I_\varepsilon(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \int_0^{\infty} G_m(s) \hat{g}_m(s) ds, \tag{10}$$

missä ydin G_m on

$$\begin{aligned} G_m(s) &= -i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 D_s \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{im\psi}}{ir\cos\psi - is - \varepsilon} - (-1)^m \frac{e^{im\psi}}{ir\cos\psi + is - \varepsilon} \right) d\psi \\ &= -i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 D_s \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{im\psi}}{ir\cos\psi - is - \varepsilon} - \frac{e^{im(\psi+\pi)}}{ir\cos\psi + is - \varepsilon} \right) d\psi \\ &= -i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 D_s \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{im\psi}}{ir\cos\psi - is - \varepsilon} - \frac{e^{im\psi}}{-ir\cos\psi + is - \varepsilon} \right) d\psi. \end{aligned}$$

Merkitään

$$\alpha_\pm = \frac{s \pm i\varepsilon}{r},$$

jolloin edellinen integraali voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$G_m(s) = -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 D_s \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{im\psi}}{\cos\psi - \alpha_+} + \frac{e^{im\psi}}{\cos\psi - \alpha_-} \right) d\psi.$$

Ryhdytään seuraavaksi laskemaan edellä esiintyviä kulmaintegraaleja. Kirjoitetaan

$$I_{m,\pm} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{im\psi}}{\cos\psi - \alpha_\pm} d\psi.$$

Aluksi todetaan, että voidaan rajoittua tarkastelemaan tapausta $m \geq 0$, sillä siirtymällä integroimismuuttujaan $-\psi$ nähdään, että $I_{-m,\pm} = I_{m,\pm}$.

Kulmaintegraalit voidaan ratkaista käyttämällä residylaskua. Tekemällä sijoitus $z = e^{i\psi}$ nähdään, että kun kulma ψ vaihtelee välillä $[0, 2\pi]$, niin z kiertää kompleksitason yksikköympyrän kehän. Differentioimalla saadaan $dz = izd\psi$, joten

$$I_{m,\pm} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^m}{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) - \alpha_\pm} \frac{dz}{z} = \frac{2}{i} \oint \frac{z^m}{z^2 - 2\alpha_\pm z + 1} dz.$$

Tulee siis selvittää integroitavan rationaalilausekkeen napojen sijainti kompleksitasossa. Kirjoitetaan

$$z^2 - 2\alpha_\pm z + 1 = (z - z_\pm^{(1)})(z - z_\pm^{(2)}).$$

Tästä näemme, että $z_{\pm}^{(1)} z_{\pm}^{(2)} = 1$, joten pätee

$$|z_{\pm}^{(1)}| < 1 < |z_{\pm}^{(2)}|.$$

Tapaus $|z_{\pm}^{(1)}| = |z_{\pm}^{(2)}| = 1$ ei tule kysymykseen: Tällöin nimittäin juurien $z_{\pm}^{(1)}$ ja $z_{\pm}^{(2)}$ argumentit $\psi_{\pm}^{(1)}$ ja $\psi_{\pm}^{(2)}$ toteuttaisivat yhtälön $\cos\psi - \alpha_{\pm} = 0$, mikä ei ole mahdollista, kun $\varepsilon > 0$. Siis Cauchyn integraalikaavasta seuraa

$$I_{m,\pm} = \frac{2}{i} \oint \frac{1}{z - z_{\pm}^{(1)}} \left(\frac{z^m}{z - z_{\pm}^{(2)}} \right) dz = \frac{2}{i} 2\pi i \frac{(z_{\pm}^{(1)})^m}{z_{\pm}^{(1)} - z_{\pm}^{(2)}}.$$

Siis G_m:llä on esitys

$$G_m(s) = -\frac{1}{\pi r} D_s \left(\frac{(z_{+}^{(1)})^m}{z_{+}^{(1)} - z_{+}^{(2)}} + \frac{(z_{-}^{(1)})^m}{z_{-}^{(1)} - z_{-}^{(2)}} \right).$$

Kompleksiluvut $z_{\pm}^{(j)}$, $j = 1, 2$, riipuvat muuttujasta s sekä parametrista $\varepsilon > 0$. Lopullisen inversiokaavan löytämiseksi joudutaan selvittämään, miten G_m käyttäytyy rajalla $\varepsilon \to 0+$. Tätä rajankäyntiä varten kirjoitetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttäen yhtälön $z^2 - 2\alpha_{\pm} z + 1 = 0$ juuret, ja selvitetään, kumpi näistä vastaa pienempää juurta $z_{\pm}^{(1)}$ ja kumpi suurempaa $z_{\pm}^{(2)}$. Jaetaan käsittely kahteen erilliseen tapaukseen:

Ensimmäinen tapaus $s > r$: Yhtälön $z^2 - 2\alpha_{\pm} z + 1 = 0$ juuret ovat

$$z = \alpha_{\pm} + (\alpha_{\pm}^2 - 1)^{1/2}, \quad z = \alpha_{\pm} - (\alpha_{\pm}^2 - 1)^{1/2}.$$

Merkitään $\alpha = s/r > 1$. Rajalla $\varepsilon \to 0+$ pätee $\alpha_{\pm} = (s \pm i\varepsilon)/r \to \alpha$. Yhtälön ensimmäisen juuren raja–arvolle saadaan arvio

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \alpha_{\pm} + (\alpha_{\pm}^2 - 1)^{1/2} = \alpha + (\alpha^2 - 1)^{1/2} > \alpha > 1.$$

Koska juuri on muuttujan ε suhteen jatkuva funktio, eikä se voi aiemmin esitetyn päättelyn nojalla koskaan leikata tason yksikköympyrän kehää, niin välttämättä ensimmäinen juuri on koko ajan kehän ulkopuolella. Toisin sanoen

$$z_{\pm}^{(2)} = \alpha_{\pm} + (\alpha_{\pm}^2 - 1)^{1/2}, \quad z_{\pm}^{(1)} = \alpha_{\pm} - (\alpha_{\pm}^2 - 1)^{1/2}.$$

Siis tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0+} G_m(s) &= -\frac{2}{\pi r} D_s \frac{(\alpha - (\alpha^2 - 1)^{1/2})^m}{\alpha - (\alpha^2 - 1)^{1/2} - (\alpha + (\alpha^2 - 1)^{1/2})} \\ &= \frac{1}{\pi r} D_s \frac{(\alpha - (\alpha^2 - 1)^{1/2})^m}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Toinen tapaus $s \leq r$: Merkitään jälleen $\alpha = s/r \leq 1$. Kirjoitetaan nyt yhtälön $z^2 - 2\alpha_\pm z + 1 = 0$ juuret muotoon

$$z = \alpha_\pm + i(1-\alpha_\pm^2)^{1/2}, \quad z = \alpha_\pm - i(1-\alpha_\pm^2)^{1/2}.$$

Edellisen kohdan päättelyä ei voida nyt sellaisenaan toistaa, sillä kun $\varepsilon \to 0$, niin juuret liukuvat kehälle $|z| = 1$. Tutkitaankin siksi, mitä juurille tapahtuu *suurilla* ε:n arvoilla. Nyt $\alpha_+ = \varepsilon(\alpha/\varepsilon + i)$, joten

$$\begin{aligned}\alpha_+ + i(1-\alpha_+^2)^{1/2} &= \varepsilon\{(\frac{\alpha}{\varepsilon} + i) + i(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} - 2i\frac{\alpha}{\varepsilon} + 1)^{1/2}\} \\ &= 2i\varepsilon(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})).\end{aligned}$$

Siis suurilla ε tämä juuri on kehän ulkopuolella. Jälleen vedoten juuren jatkuvuuteen parametrin ε funktiona päätellään, että kyseinen juuri ei voi kulkeutua yksikköympyrän kehän sisälle, kun ε vaihtelee. Niinpä

$$z_+^{(1)} = \alpha_+ - i(1-\alpha_+^2)^{1/2} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \alpha - i(1-\alpha^2)^{1/2} = z^{(1)},$$

ja

$$z_+^{(2)} = \alpha_+ + i(1-\alpha_+^2)^{\frac{1}{2}} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \overline{z^{(1)}}.$$

Vastaavasti todetaan, että

$$\begin{aligned}\alpha_- - i(1-\alpha_-^2)^{1/2} &= \varepsilon\{(\frac{\alpha}{\varepsilon} - i) - i(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + 2i\frac{\alpha}{\varepsilon} + 1)^{1/2}\} \\ &= -2i\varepsilon(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})),\end{aligned}$$

joten suurilla ε:in arvoilla tämä juuri on yksikköympyrän ulkopuolella. Siksi

$$z_-^{(1)} = \alpha_- + i(1-\alpha_-^2)^{1/2} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \overline{z^{(1)}},$$

ja vastaavasti

$$z_-^{(2)} = \alpha_- - i(1-\alpha_-^2)^{1/2} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} z^{(1)}.$$

Näin ollen, kun $s \leq r$, pätee

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0+} G_m(s) &= -\frac{1}{\pi r} D_s \left(\frac{(z^{(1)})^m}{z^{(1)} - \overline{z^{(1)}}} + \frac{(\overline{z^{(1)}})^m}{\overline{z^{(1)}} - z^{(1)}} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi r} D_s \frac{(z^{(1)})^m - (\overline{z^{(1)}})^m}{z^{(1)} - \overline{z^{(1)}}} \\ &= \frac{i}{2\pi r} D_s \frac{(\alpha - i(1-\alpha^2)^{1/2})^m - (\alpha + i(1-\alpha^2)^{1/2})^m}{(1-\alpha^2)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Sijoittamalla saadut tulokset kaavaan (10) saadaan seuraavan lemman ilmaisema tulos.

Lemma 2.2 *Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ Fourier–kertoimet $\hat{f}_m(r)$ saadaan laskettua Radon–muunnoksensa $Rf = g$ Fourier–kertoimista $\hat{g}_m(s)$ kaavalla*

$$\hat{f}_m(r) = \frac{1}{\pi r}\left(\int_0^r D_s P_{|m|}(\frac{s}{r})\hat{g}_m(s)ds + \int_r^\infty D_s Q_{|m|}(\frac{s}{r})\hat{g}_m(s)ds\right),$$

missä integraaliytimet $P_{|m|}$ ja $Q_{|m|}$ määritellään kaavoilla

$$P_{|m|}(\alpha) = \frac{i}{2}\frac{(\alpha - i(1-\alpha^2)^{1/2})^{|m|} - (\alpha + i(1-\alpha^2)^{1/2})^{|m|}}{(1-\alpha^2)^{1/2}}$$

ja

$$Q_{|m|}(\alpha) = \frac{(\alpha - (\alpha^2-1)^{1/2})^{|m|}}{(\alpha^2-1)^{1/2}}.$$

Osoittautuu, että saatua lauseketta voidaan vielä sieventää jonkin verran. Tämä sievennys perustuu siihen, että itse asiassa funktio $P_{|m|}$ osoittautuu polynomiksi, kuten seuraavassa lemmassa todistetaan.

Lemma 2.3 *Funktio P_m, $m \geq 1$, on välillä $[-1, 1]$ $(m-1)$–asteinen polynomi, jolle pätee*

$$P_m(-\alpha) = (-1)^{m-1}P_m(\alpha).$$

Todistus: Kirjoitetaan $\alpha = \cos\psi$ eli $\psi = \arccos\alpha$, $-1 < \alpha < 1$. Nyt

$$z^{(1)} = \cos\psi - i(1-\cos^2\psi)^{1/2} = \cos\psi - i\sin\psi = e^{-i\psi},$$

joten

$$\begin{aligned} P_m(\alpha) &= \frac{(z^{(1)})^m - (\overline{z^{(1)}})^m}{z^{(1)} - \overline{z^{(1)}}} \\ &= \frac{(e^{-i\psi})^m - (e^{i\psi})^m}{e^{-i\psi} - e^{i\psi}} = \frac{\sin(m\psi)}{\sin\psi}. \end{aligned}$$

Tästä muodosta väite saadaan helposti induktiolla. Selvästi nimittäin $P_1(\alpha) = 1$, ja toisaalta trigonometrisillä kaavoilla

$$\begin{aligned} P_m(\alpha) &= \frac{\sin\psi\cos((m-1)\psi) + \cos\psi\sin((m-1)\psi)}{\sin\psi} \qquad (11) \\ &= \cos((m-1)\psi) + \cos\psi P_{m-1}(\alpha) = T_{m-1}(\alpha) + \alpha P_{m-1}(\alpha). \end{aligned}$$

Tässä T_{m-1} on Tšebysheffin astetta $m-1$ oleva polynomi. Tästä rekursiokaavasta väite seuraa. □

Seuraavaksi laajennetaan funktio P_m polynomina koko reaaliakselille. Käytännössä tämä voidaan tehdä käyttämällä saatua rekursiokaavaa (11). Tavoitteena on korvata inversiokaavassa esiintyvä integraali välin $[0, r]$ yli integraalilla välin $[r, \infty[$ yli. Tätä varten tarvitaan seuraava aputulos.

Lemma 2.4 *Radon-muunnoksen $g(s,\varphi)$ Fourier-komponenteille $\hat{g}_m(s)$ on voimassa*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_m(s) Q(s) ds = 0$$

kaikilla polynomeilla Q, joiden aste on enintään $m-1$.

Todistus: olkoon $\ell \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^\ell g(s,\varphi) ds = \int_{-\infty}^{\infty} s^\ell \int_{-\infty}^{\infty} f(s\omega + t\omega_\perp) dt ds,$$

missä jälleen $\omega = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Kun merkitään $x = s\omega + t\omega_\perp$, on $s^\ell = (x\cdot\omega)^\ell$, eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^\ell g(s,\varphi) ds = \int_{\mathbb{R}^2} (x\cdot\omega)^\ell f(x) dx.$$

Olkoon $x = (x_1, x_2)$. Nyt

$$(x\cdot\omega)^\ell = (x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi)^\ell$$

$$= \Big(\frac{x_1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + \frac{x_2}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\Big)^\ell = \sum_{|n|\le\ell} p_n(x_1,x_2) e^{in\varphi},$$

missä kertoimet p_n ovat x_1:n ja x_2:n polynomeja. Niinpä

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^\ell g(s,\varphi) ds = \sum_{|n|\le\ell} e^{in\varphi} \int_{\mathbb{R}^2} p_n(x_1,x_2) f(x) dx = \sum_{|n|\le\ell} c_n e^{in\varphi}.$$

Siis kun $\ell \le |m|-1$, pätee

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} s^\ell \hat{g}_m(s) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} s^\ell \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} g(s,\varphi) d\varphi ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s^\ell g(s,\varphi) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{|n|\le\ell} c_n \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{in\varphi} d\varphi = 0
\end{aligned}$$

kompleksisten eksponentiaalien ortogonaalisuuden nojalla. □

Tarkastellaan nyt Lemman 2.2 ensimmäistä integraalia, joka muunnetaan muotoon

$$\int_0^r D_s P_{|m|}(\frac{s}{r}) \hat{g}_m(s) ds = \int_0^\infty D_s P_{|m|}(\frac{s}{r}) \hat{g}_m(s) ds - \int_r^\infty D_s P_{|m|}(\frac{s}{r}) \hat{g}_m(s) ds,$$

mistä edelleen $P_{|m|}$:n ja $\hat{g}_m$ symmetriaominaisuuksia käyttäen ensimmäinen integraaleista antaa

$$\int_0^\infty D_s P_{|m|}(\frac{s}{r})\hat{g}_m(s)ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty D_s P_{|m|}(\frac{s}{r})\hat{g}_m(s)ds = 0$$

Lemman 2.4 nojalla, sillä $s \mapsto D_s P_{|m|}(s/r)$ on polynomi, jonka aste on enintään $|m| - 2$.

Lemman 2.2 tulos on saatu siten muunnettua seuraavaan muotoon.

Lause 2.6 *Tason funktion f Fourier-kertoimet saadaan Radon–muunnoksen g Fourier–kertoimista kaavalla*

$$\hat{f}_m(r) = \frac{1}{\pi r^2}\int_r^\infty (P'_{|m|}(\frac{s}{r}) + Q'_{|m|}(\frac{s}{r}))\hat{g}_m(s)ds,$$

missä $P_{|m|}$ ja $Q_{|m|}$ ovat määritelty kuten Lemmassa 2.2.

Saadusta tuloksesta voidaan lukea seuraava Radon–muunnoksen kiinnostava ominaisuus.

Seuraus 2.2 *Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ arvo pisteessä $x \in \mathbb{R}^2$ määräytyy sen Radon–muunnoksen arvoista joukossa $\{(s,\varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1 \mid s > |x|\}$.*

Vaikka ylläoleva tulos osoitettiinkin vain tapauksesta $n = 2$, on se yleisemmin voimassa $\mathbb{R}^n$:ssä.

2.3 ART–algoritmi

ART on paljon käytetty iteratiivinen algoritmi tomografiaongelman ratkaisemiseksi numeerisesti. ART on lyhennys sanoista *Algebraic Reconstruction Technique*, ja se soveltuu erityisen hyvin suuren tomografiadatan käsittelyyn.

Oletetaan, että kuva–alue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, on jaettu pikseleihin V_j,

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^N V_j,$$

missä pikseleillä V_j on erilliset sisäpisteiden joukot. Approksimoidaan rekonstruoitavaa tiheysjakaumaa paloittain vakiolla funktiolla,

$$\rho|_{V_j} = x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Olkoot L_ℓ, $1 \leq \ell \leq M$, suora, jota pitkin tiheyden ρ integraali on mitattu, s.o. tunnetaan luvut

$$g_\ell = \int_{L_\ell} \rho(x) dl(x), \quad 1 \leq \ell \leq M.$$

Merkitään

$$a_{\ell,j} = \text{pituus}(L_\ell \cap V_j).$$

Tällöin saamme yksinkertaisen lineaarisen matriisiapproksimaation tomografiamittaukselle:

$$g_\ell = \sum_{j=1}^{N} a_{\ell,j} x_j, \tag{12}$$

eli lyhyemmin matriisimerkinnöillä

$$g = Ax. \tag{13}$$

Huomattava piirre tässä yhtälössä on, että $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ on tyypillisesti erittäin suuri harva matriisi. Tavoitteena on laskea $x = A^{-1}g$ iteratiivisesti.

Merkitään matriisin A rivejä a_ℓ^T:llä,

$$a_\ell^T = (a_{\ell,1}, a_{\ell,2}, \ldots, a_{\ell,N}).$$

Yhtälö (12) kirjoitetaan nyt lyhyesti muotoon

$$g_\ell = a_\ell^T x, \quad 1 \leq \ell \leq M. \tag{14}$$

Oletetaan jatkossa, että kaikilla ℓ pätee $a_\ell \neq 0$, toisin sanoen jokainen mittaussuora lävistää ainakin yhden pikselin. ART on menetelmä, jossa yhtälöitä (14) käsitellään yksi kerrallaan. Osoittautu, että ART voidaan palauttaa erääseen yleisempään iteraatiotekniikkaan, joka tunnetaan nimellä *Kaczmarzin iteraatio*. Käydään seuraavassa tämä iteraatioalgoritmi läpi.

Olkoot H ja H_ℓ, $1 \leq \ell \leq M$ Hilbert–avaruuksia, ja

$$A_\ell : H \to H_\ell$$

jatkuvia lineaarikuvauksia, jotka ovat surjektioita. Halutaan löytää $x \in H$, joka toteuttaa yhtälöt

$$A_\ell x = g_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq M,$$

missä $g_\ell \in H_\ell$. Merkitään

$$X_\ell = \{x \in H \mid A_\ell x = g_\ell\}.$$

Olkoon P_ℓ kohtisuora projektio

$$P_\ell : H \to X_\ell.$$

Kaczmarzin iteraatio määritellään nyt seuraavasti:

Menetelmä: Olkoon $0 < \omega < 2$, ja

$$P_\ell^\omega = (1-\omega)\mathbf{1} + \omega P_\ell,$$

missä $\mathbf{1}$ on identtinen kuvaus, ja edelleen

$$P^\omega = P_M^\omega P_{M-1}^\omega \dots P_1^\omega.$$

Kaczmarzin jono $\{x^0, x^1, x^2, \dots\} \subset H$ saadaan iteraatiolla

$$x^0 = 0, \quad x^j = P^\omega x^{j-1}, \quad j \geq 1.$$

Ennen kuin tarkastelemme Kaczmarzin jonon suppenemisominaisuuksia, kirjoitetaan iteraatiokaava eksplisiittisesti kuvausten A_ℓ avulla, ja sovelletaan sitä tomografiadatan käsittelyyn. Todistetaan seuraava aputulos.

Lemma 2.5 *Olkoon $A : H \to H_0$ surjetio, $g \in H_0$ ja*

$$P : H \to X = \{x \in H \mid Ax = g\} \neq \emptyset$$

kohtisuora projektio. Tällöin P:llä on esitys

$$Px = x + A^T(AA^T)^{-1}(g - Ax).$$

Tässä lemmassa esiintyvä merkintä A^T tarkoittaa operaattorin A adjungaattia, joka reaalisten matriisien tapauksessa yhtyy matriisin transpoosiin. Jos merkitään sisätuloa H:ssa ja H_0:ssa $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_H$:lla ja $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{H_0}$:lla, niin $A^T H_0 \to H$ määritellään kaavalla

$$(x, A^T y)_H = (Ax, y)_{H_0}.$$

Alaindeksit H ja H_0 jätetään merkitsemättä, milloin k.o. avaruus on yhteydestä selvä.

Todistus: Olkoon

$$Q : H \to \mathrm{Ker}(A)$$

kohtisuora projektio, ja $z \in X$. Tällöin P:llä on esitys

$$Px = z + Q(x - z),$$

mikä nähdään seuraavasti. Ensinnäkin

$$A(z + Q(x - z)) = Az = g,$$

joten $z + Q(x - z) \in X$. Toisaalta jos x_1, $x_2 \in X$, niin $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$, joten

$$(x - (z + Q(x - z)), x_1 - x_2)_H = ((1 - Q)(x - z), x_1 - x_2)_H = 0,$$

ja siis

$$x - (z + Q(x - z)) \perp X.$$

Koska

$$x - Px = (1 - Q)(x - z) \in \mathrm{Ker}(A)^{\perp} = \mathrm{Im}(A^T),$$

niin on olemassa $u \in H$, jolle

$$x - Px = A^T u. \tag{15}$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä u. Koska $APx = g$, niin

$$AA^T u = Ax - APx = Ax - g.$$

Jos kuvaus $AA^T : H \to H_0$ on kääntyvä, niin tästä yhtälöstä saadaan

$$u = (AA^T)^{-1}(Ax - g),$$

mistä edelleen sijoittamalla yhtälöön (15) saadaan

$$Px = x - A^T u = x + A^T(AA^T)^{-1}(g - Ax).$$

Lemma on siten todistettu, kunhan näytetään, että operaattori AA^T on kääntyvä. Näytetään aluksi, että A^T on injektio. Jos $A^T x = 0$, $x \in H_0$, niin tällöin kaikilla $y \in H$ pätee

$$0 = (A^T x, y)_H = (x, Ay)_{H_0},$$

eli $x \perp \mathrm{Im}(A) = H_0$, eli $x = 0$. Siis A^T ja siten myös AA^T on injektio. Lisäksi AA^T on surjektio. Jos nimittäin $y \perp \mathrm{Im}(AA^T)$, niin pätee

$$0 = (y, AA^T x)_{H_0} = (A^T y, A^T x)_H$$

kaikilla $x \in H_0$. Valitsemalla $x = y$ saadaan

$$\|A^T y\|^2 = 0,$$

ja koska A^T on injektio, on $y = 0$. $\square$

Sovelletaan nyt lemmaa tomografiaongelmaan. Tällöin

$$A_\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_\ell^T x.$$

Edellisen lemman nojalla

$$\begin{aligned} P_\ell x &= = x + a_\ell(a_\ell^T a_\ell)^{-1}(g_\ell - a_\ell^T x) \\ &= x + \frac{1}{\|a_\ell\|^2}(g_\ell - a_\ell^T x)a_\ell. \end{aligned}$$

Voimme nyt kirjoittaa ART–algoritmin seuraavaan muotoon:

Algoritmi: Asetetaan $j = 0$, $x^0 = 0$ ja valitaan ω, $0 \leq \omega \leq 2$.

Toista, kunnes konvergenssi tyydyttävä:
    $x_0 = x^j$;
    toista $\ell = 1 : M$
        $x_\ell = x_{\ell-1} + \frac{\omega}{\|a_\ell\|^2}(g_\ell - a_\ell^T x_{\ell-1})a_\ell$;
    lopeta
    $x^{j+1} = x_M$; $j = j + 1$;
lopeta

Edellä esitetyssä algoritmissa ulomman iteraation lopetusehtona on menetelmän tyydyttävä konvergenssi. Ehdon järkevyys perustuu seuraavaan lauseeseen

Lause 2.7 *Oletetaan, että $\cap_{\ell=1}^M X_\ell \neq \emptyset$ ja $0 < \omega < 2$. Tällöin Kaczmarzin jono $\{x^0, x^1, x^2, \ldots\}$ konvergoi kohti yhtälöryhmän*

$$A_\ell x = g_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq M$$

miniminormiratkaisua.

Lauseen todistus vaatii joukon aputuloksia. Aloitetaan tarkastelemalla tapausta, jossa $g_\ell = 0$. Olkoon sitä varten $Q_\ell : H \to \mathrm{Ker}(A_\ell)$ kohtisuora projektio. Määritellään

$$Q_\ell^\omega = (1 - \omega)\mathbf{1} + \omega Q_\ell.$$

Merkitään $Q_\ell^\perp = 1 - Q_\ell$. Nyt

$$\begin{aligned} Q_\ell^\omega &= (1 - \omega)(Q_\ell + Q_\ell^\perp) + \omega Q_\ell \\ &= Q_\ell + (1 - \omega)Q_\ell^\perp. \end{aligned}$$

Niinpä, jos $0 < \omega < 2$, kaikilla $x \in H$ pätee

$$\begin{aligned} \|Q_\ell^\omega x\|^2 &= \|Q_\ell x\|^2 + (1 - \omega)^2\|Q_\ell^\perp\|^2 \\ &\leq \|Q_\ell x\|^2 + \|Q_\ell^\perp x\|^2 = \|x\|^2, \end{aligned}$$

mistä päätellään, että

$$\|Q_\ell^\omega\| \leq 1. \tag{16}$$

Tehdään toinen tärkeä havainto. Pätee nimittäin

$$\begin{aligned} \|Q_\ell^\omega x\|^2 &= \|Q_\ell x\|^2 + (1 - \omega)^2\|Q_\ell^\perp\|^2 \\ &= \|Q_\ell x\|^2 + (1 - \omega)^2(\|x\|^2 - \|Q_\ell x\|^2), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \|x\|^2 - \|Q_\ell^\omega x\|^2 &= (1 - (1 - \omega)^2)(\|x\|^2 - \|Q_\ell x\|^2) \\ &= \omega(2 - \omega)(\|x\|^2 - \|Q_\ell x\|^2). \end{aligned} \tag{17}$$

Näitä tuloksia käytetään seuraavan lemman todistuksessa.

Lemma 2.6 *Olkoon $x^k \in H$ jono, jolle pätee*

$$\|x^k\| \leq 1, \quad \lim_{k\to\infty} \|Q^\omega x^k\| = 1.$$

Tällöin

$$\lim_{k\to\infty} (1 - Q^\omega)x^k = 0.$$

Todistus: Todistetaan väite induktiolla aliavaruuksien lukumäärän suhteen. Olkoon siis aluksi $Q^\omega = Q_1^\omega$. Nyt

$$\begin{aligned} \|(1 - Q^\omega)x^k\|^2 &= \|x^k - (1-\omega)x^k - \omega Q_1 x^k\|^2 = \omega^2 \|Q_1^\perp x^k\|^2 \\ &= \omega^2(\|x^k\|^2 - \|Q_1 x^k\|^2) \\ &= \frac{\omega}{2-\omega}(\|x^k\|^2 - \|Q_1^\omega x^k\|^2) \to \frac{\omega}{2-\omega}(1-1) = 0, \end{aligned}$$

eli väite pätee, kun $M = 1$.

Tehdään induktio–oletus, että väite pätee, kun

$$Q^\omega = Q_m^\omega \dots Q_1^\omega = q^\omega.$$

Olkoon nyt

$$Q^\omega = Q_{m+1}^\omega Q_m^\omega \dots Q_1^\omega = Q_{m+1}^\omega q^\omega.$$

Kirjoitetaan

$$\begin{aligned} (1 - Q^\omega)x^k &= (1 - q^\omega)x^k + (q^\omega - Q^\omega)x^k \\ &= (1 - q^\omega)x^k + (1 - Q_{m+1}^\omega)q^\omega x^k. \end{aligned}$$

Induktio–oletuksen nojalla ensimmäinen termi konvergoi kohti nollaa. Toisaalta epäyhtälön (16) nojalla pätee $\|q^\omega x^k\| \leq \|x^k\| \leq 1$. Samoin

$$\|Q^\omega x^k\| \leq \|q^\omega x^k\|,$$

joten

$$\lim_{k\to\infty} \|q^\omega x^k\| = 1.$$

Niinpä yhtä aliavaruutta koskenut päättely osoittaa, että myös jälkimmäinen termi suppenee kohti nollaa. $\square$

Todistetaan seuraava hyödyllinen aputulos.

Lemma 2.7 *Olkoon $T : H \to H$ jatkuva lineaarikuvaus, jolle pätee $\|T\| \leq 1$. Tällöin H voidaan esittää suorana summana*

$$H = \mathrm{Ker}(1 - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(1 - T)},$$

missä aliavaruudet ovat ortogonaalisia.

Todistus: Yleisesti on voimassa esitys

$$H = \mathrm{Ker}(A) \oplus \overline{\mathrm{Im}(A^T)},$$

kun A on mielivaltainen jatkuva lineaarikuvaus. Soveltamalla tätä operaattoriin $1 - T^T$ saadaan esitys

$$H = \mathrm{Ker}(1 - T^T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(1 - T)}.$$

Lemman todistamiseksi riittää siten näyttää, että

$$\mathrm{Ker}(1 - T^T) = \mathrm{Ker}(1 - T).$$

Olkoon siis $x \in \mathrm{Ker}(1 - T)$, eli $x = Tx$. Tällöin

$$\begin{aligned} \|x - T^T x\|^2 &= \|x\|^2 - 2(x, T^T x) + \|T^T x\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2(Tx, x) + \|T^T x\|^2 \\ &= -\|x\|^2 + \|T^T x\|^2. \end{aligned}$$

Koska $\|T^T x\| \leq \|x\|$, saadaan edellisestä yhtälöstä arvio

$$\|x - T^T x\|^2 \leq -\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0,$$

eli $x = T^T x$. Siis $\mathrm{Ker}(1-T) \subset \mathrm{Ker}(1-T^T)$. Inkluusio toiseen suuntaan päätellään samalla tavalla. $\square$.

Seuraava lemma sanoo oleellisesti sen, että Kaczmarzin jono suppenee tapauksessa $g_\ell = 0$.

Lemma 2.8 *Olkoon $T : H \to \mathrm{Ker}(1 - Q^\omega)$ kohtisuora projektio. Tällöin kaikilla $x \in H$ pätee*

$$\lim_{k\to\infty} (Q^\omega)^k x = Tx.$$

Todistus: Osoitetaan aluksi, että kaikilla $y \in \mathrm{Im}(1 - Q^\omega)$,

$$\lim_{k\to\infty} (Q^\omega)^k y = 0.$$

Olkoon siis $y \in \mathrm{Im}(1 - Q^\omega)$, ja $x \in H$ sellainen alkio, että $y = (1 - Q^\omega)x$. Tarkastellaan aluksi lukujonoa $c_k = \|(Q^\omega)^k x\|$. Epäyhtälöstä (16) seuraa, että

$$c_k = \|Q^\omega (Q^\omega)^{k-1} x\| \leq \|(Q^\omega)^{k-1} x\| = c_{k-1},$$

eli jono on vähenevä ja siten sillä on olemassa raja–arvo. Merkitään

$$c = \lim_{k\to\infty} c_k.$$

Tarkastellaan aluksi tapausta, jossa $c = 0$. Tällöin pätee

$$\lim_{k\to\infty} (Q^\omega)^k x = 0,$$

ja siksi

$$\lim_{k\to\infty} (Q^\omega)^k y = \lim_{k\to\infty} ((Q^\omega)^k - (Q^\omega)^{k+1})x = 0.$$

Oletetaan seuraavaksi, että $c > 0$. Määritellään

$$z_k = \frac{(Q^\omega)^k x}{\|(Q^\omega)^k x\|},$$

jolloin

$$\|z_k\| = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \|Q^\omega z_k\| = 1.$$

Edellisen lemman nojalla voidaan päätellä, että

$$\lim_{k\to\infty} (1 - Q^\omega) z_k = 0,$$

joten myös

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} (Q^\omega)^k y &= \lim_{k\to\infty} (Q^\omega)^k (1 - Q^\omega) x \\ &= \lim_{k\to\infty} (1 - Q^\omega)(Q^\omega)^k x = 0.\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että myös kaikilla $y \in \overline{\mathrm{Im}(1 - Q^\omega)}$ pätee

$$\lim_{k\to\infty} (Q^\omega)^k y = 0.$$

Olkoon siis $\varepsilon > 0$. Valitaan $y_0 \in \mathrm{Im}(1 - Q^\omega)$ siten, että $\|y - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\|(Q^\omega)^k y\| &\leq \|(Q^\omega)^k (y - y_0)\| + \|(Q^\omega)^k y_0\| \\ &\leq \|y - y_0\| + \|(Q^\omega)^k y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

kun k on riittävän suuri.

Olkoon $x \in H$ mielivaltainen. Kirjoitetaan edellisen lemman mukaisesti x muotoon

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \mathrm{Ker}(1 - Q^\omega), \quad x_2 = \overline{\mathrm{Im}(1 - Q^\omega)}.$$

Koska $Q^\omega x_1 = x_1$, niin saadaan

$$(Q^\omega)^k x = x_1 + (Q^\omega)^k x_2 \to x_1 = Tx,$$

kuten väitettiin. □

On siis todistettu, että kun $g_\ell = 0$, niin Kaczmarzin jono suppenee kohti alkiota, joka on aliavaruudessa $\mathrm{Ker}(1 - Q^\omega)$. Seuraavaksi selvitetään, mikä tämä aliavaruus itse asiassa on. Vastauksen antaa seuraava aputulos.

Lemma 2.9 *Kun $0 < \omega < 2$, niin*

$$\mathrm{Ker}(1 - Q^{\omega}) = \bigcap_{\ell=1}^{M} \mathrm{Ker}(1 - Q_{\ell}).$$

Todistus: Olkoon aluksi $x \in \mathrm{Ker}(1 - Q_{\ell})$ kaikilla ℓ. Tällöin $x = Q_{\ell}x$, mistä seuraa

$$Q_{\ell}^{\omega}x = (1 - \omega)x + \omega Q_{\ell}x = x,$$

ja edelleen

$$Q^{\omega}x = Q_{M}^{\ell} \dots Q_{1}^{\omega}x = x.$$

Siis $x \in \mathrm{Ker}(1 - Q^{\omega})$.

Kääntäen, olkoon $x = Q^{\omega}x$. Tällöin epäyhtälö (16) implikoi

$$\|x\| = \|Q^{\omega}x\| = \|Q_{M}^{\omega} \dots Q_{2}^{\omega}Q_{1}^{\omega}x\| \leq \|Q_{1}^{\omega}x\| \leq \|x\|,$$

eli $\|Q_{1}^{\omega}x\| = \|x\|$. Nyt yhtälöstä (17) seuraa

$$\|Q_{1}x\|^{2} - \|x\|^{2} = \frac{1}{\omega(2 - \omega)}(\|Q_{1}^{\omega}x\|^{2} - \|x\|^{2}) = 0.$$

Koska Q_1 on kohtisuora projektio, niin pätee

$$\|x\|^{2} = \|Q_{1}x\|^{2} + \|Q_{1}^{\perp}x\|^{2} = \|x\|^{2} + \|Q_{1}^{\perp}x\|^{2},$$

eli $Q_{1}^{\perp}x = 0$ ja siten $x = Q_{1}x$. Toistamalla päättely saadaan lopulta $x = Q_{\ell}x$ kaikilla ℓ, mikä todistaa väitteen. □

Lauseen 2.7 todistus saadaan nyt yhdistämällä tulokset.

Lauseen 2.7 todistus: Olkoon $z \in \cap_{\ell=1}^{M} X_{\ell}$ mielivaltainen. Kuten lemman 2.5 todistuksessa kirjoitetaan P_{ℓ} muotoon

$$P_{\ell}x = z + Q_{\ell}(x - z).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} P_{\ell}^{\omega}x &= (1 - \omega)x + \omega(z + Q_{\ell}(x - z)) \\ &= z + (1 - \omega)(x - z) + \omega Q_{\ell}(x - z) \\ &= z + Q_{\ell}^{\omega}(x - z). \end{aligned}$$

Edelleen, saadaan

$$\begin{aligned} P_{2}^{\omega}P_{1}^{\omega}x &= z + Q_{2}^{\omega}(z - P_{1}^{\omega}x) \\ &= z + Q_{2}^{\omega}Q_{1}^{\omega}(x - z), \end{aligned}$$

eli induktiivisesti

$$P^\omega x = z + Q^\omega(x - z).$$

Samoin päätellään, että

$$(P^\omega)^k x = z + (Q^\omega)^k(x - z).$$

Kun $k \to \infty$, niin edellisten aputulosten nojalla

$$x^k = (P^\omega)^k x^0 = z + (Q^\omega)^k(x^0 - z) \to z - Tz,$$

missä T on kohtisuora projektio

$$T : H \to \bigcap_{\ell=1}^{M} \mathrm{Ker}(1 - \mathrm{Q}_\ell) = \bigcap_{\ell=1}^{M} \mathrm{Ker}(\mathrm{A}_\ell).$$

Koska

$$A_\ell(z - Tz) = A_\ell z = g_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq M,$$

on raja–arvo yhtäloryhmän (13) ratkaisu. Lisäksi se on mimiminormiratkaisu, sillä jokaiselle ratkaisulle z pätee

$$\|(1 - T)z\| \leq \|z\|.$$

Lause on siten todistettu. □

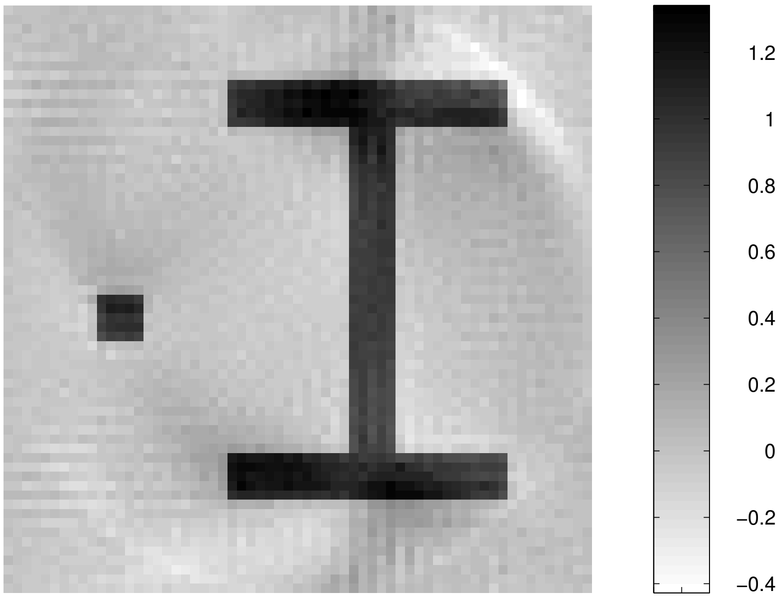
Lopuksi esitetään numeerinen esimerkki. Tarkastellaan jälleen Kuvan 1 mukaista alkuperäistä tiheysjakaumaa, josta lasketaan Radon–muunnos, ja sovelletaan ART–algoritmia saatuun dataan. Kuvassa 5 on laskettu rekonstruktio. Saatu rekonstruktio on itse asiassa hieman liian optimistinen. Syynä on se, että *datan generointiin käytettiin samaa matriisia, jota ART–algoritmi käytti inversio–ongelman ratkaisemiseen.* Yleensä tällaista menettelyä on syytä välttää. Menettely on inversio–ongelmien tutkijoiden parissa saanut nimen *inverse crime.*

Harjoitustehtäviä:

1. ART–algoritmia sovellettiin $\mathbb{R}^3$:ssa mittaukseen, jossa tunnetaan integraalit tiheydestä yli *suorien* eikä tasojen, kuten aiemmin on oletettu. Johda Lauseen 2.2 kaavan (2) vastine tälle tomografiadatalle.

2. Tarkastellaan matriisiyhtälöä $Ax = y$, missä $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ ja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Yhtälön ratkaisua voidaan hakea iteratiivisesti ns. *Landweber–Fridman–iteraatiolla* seuraavasti: Asetetaan $x^0 = 0$ ja määritellään rekursio

$$x^j = x^{j-1} + \frac{\omega}{\|A\|^2} A^T(y - Ax^{j-1}), \quad j \geq 1,$$



Kuva 5. Rekonstruktio ART–algoritmia käyttämällä. Ulompia iteraatioita on tätä rekonstruktiota varten tehty 3 kierrosta. Relaksaatioparametriksi valittiin $\omega = 1$.

missä relaksaatioparametri ω valitaan väliltä $0 < \omega < 2$. Osoita, että jos A on täyttä astetta oleva matriisi, niin iteraation residuaali suppenee kohti nollaa, s.o.

$$\lim_{j\to\infty}(y - Ax^j) = 0.$$

3. Edellisen tehtävän iteraatio tuottaa k:n iteraation jälkeen approksimaation x^k ratkaisulle x (mikäli sellainen on olemassa). Osoita induktiolla, että

$$x^k = R_k y, \quad R_k = \frac{\omega}{\|A\|}\sum_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{\omega}{\|A\|^2}A^TA\right)^j A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

4. Olkoon A:n singulaariarvohajotelma $A = UDV^T$. Edellisen tehtävän matriisi R_k approksimoi A:n pseudoinverssiä A^+. Luvun 1 merkinnöin, olkoon

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_{\mathrm{min(m,n)}}) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

ja olkoon r suurin sellainen indelksi j, jolla $d_j > 0$. Osoita, että R_k voidaan kirjoittaa muotoon

$$R_k = VD_k^+U^T,$$

missä $D_k^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ on diagonaalimatriisi

$$D_k^+ = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \ldots, q_{\min(m,n)})$$

ja

$$q_j = \begin{cases} \dfrac{1-(1-\frac{\omega}{\|A\|^2}d_j^2)^k}{d_j}, & 1 \le j \le r, \\ 0, & r < j \le \min(m,n). \end{cases}$$

Kaavasta nähdään, että kun $k \to \infty$, niin $R_k \to A^+$. Mihin Landweber–Fridman–iteraation regularisointiominaisuus perustuu?