6. Kinemaattinen inversio-ongelma.

Tarkastellaan hiukkasta, joka liikkuu Hamiltonin funktion $H(x,p)$ määräämän liikelain mukaan. Tällöin

$x(t)$ = hiukkasen paikka $\in \mathbb{R}^n$

$p(t)$ = hiukkasen "liikemäärä" $\in \mathbb{R}^n$

toteuttavat Hamiltonin yhtälöt

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = (\nabla_p H)(x(t), p(t)), \quad x(0) = x_0$$

$$(2) \qquad \frac{dp}{dt} = \dot{p}(t) = -(\nabla_x H)(x(t), p(t)), \quad p(0) = p_0.$$

Esim Olkoon $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x)$.

Silloin

$$\dot{x}(t) = p(t)$$

$$\dot{p}(t) = -\nabla V(x(t))$$

josta $\ddot{x}(t) = -\nabla V(x(t))$.

Esim 2 Tarkastellaan aaltoliikkeen geometrisen optiikan rajaa (taajuus $\to \infty$). Tällöin aallon voi ajatella koostuvan hiukkasista (esim. fotoneista) joiden liike määräytyy Hamiltonin funktiosta

$$H(x,p) = \frac{1}{2} c(x)^2 p^2$$

tai

$$H(x,p) = c(x)\,|p|$$

= sym. pos. def. matriisi

Esim 3 Olkoon $g_{ij}(x)$ Riemannin metriikka, joka määrää ei-Euklidisen etäisyyselementin ds joukossa $M \subset \mathbb{R}^n$,

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx^i dx^j$$

eli polulle γ

$$|\gamma| = \text{Pituus}(\gamma) = \int_a^b \Big(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\gamma(t))\, \dot{\gamma}^i(t)\, \dot{\gamma}^j(t) \Big)^{1/2} dt,$$

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad \gamma = \gamma([a,b])$$

Tällöin geodeesit, eli lokaalisti etäisyyden minimoivat käyrät $\gamma(t)$ saadaan ratkaisemalla Hamiltonin yhtälöt (1)-(2) kun

$$H(x,p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\, p_i\, p_j ,$$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad [g_{ij}]^{-1} = [g^{ij}]$$

Tällöin $\gamma(t) = x(t)$, $\dot{\gamma}^j(t) = \sum_{i=1}^{n} g^{ij}(x(t))\, p_j(t)$

ESIM: $g_{ij}(x) = \frac{1}{c(x)^2} \cdot \delta_{ij}$

Kinemaattinen inversio-ongelma I.

Olkoon $c(x) > 0$ sileä funktio M:ssä, $M \subset \mathbb{R}^n$ ja

$$H(x,p) = c(x)\,|p|$$

Oletetaan, että tunnemme kaikille $z, y \in \partial M$ läpikulkuajat

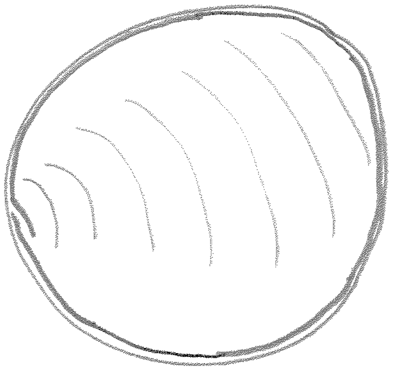
$$T(z,y) = \inf \{ T \geq 0 : \text{On olemassa yhtälön (1)-(2) ratkaisu } x(t), p(t), \text{ jolle } x(0) = z,\ x(T) = y,\ p(0) = p_0,\ H(z,p_0) = 1. \}$$

Kinemaattinen inversio-ongelma II

Olkoon $M \subset \mathbb{R}^n$ ja $g_{ij}(x)$ Riemannin metriikka M:llä. Oletetaan, että tunnemme pisteiden $x, y \in \partial M$ etäisyydet, ts.

$$d_g(x,y) = \inf \left\{ |\gamma| \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : [0,1] \to M \\ C^1\text{-sileä}, \ \gamma(0) = x \\ \qquad\qquad\quad \gamma(1) = y \end{array} \right\}$$

<u>Esim</u> Määräävätkö maanjäristysten kulkuajat aallon nopeuden maan sisällä?



6.1 Radiaalisymmetrinen tapaus tasossa

Olkoon $$M = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2,$$

(3) $$H(x,p) = c(x)\,|p|,$$

$$c(x) = c(|x|) = c(r), \quad r = |x|, \quad c \in C^{\infty}$$

Hamiltonin yhtälöt (1)–(2) saavat muodon

(4) $$\dot{x} = c(r)\,\hat{p} \qquad x(0) = x_0$$

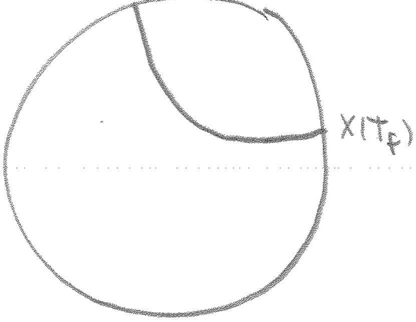
(5) $$\dot{p} = -c'(r)\,|p|\,\hat{x} \qquad p(0) = p_0$$

missä

$$x = r\hat{x}, \quad |\hat{x}| = 1 \quad \text{ts. } r = r(t) = |x(t)|$$

$$p = |p|\,\hat{p}, \quad |\hat{p}| = 1, \quad |p| = \sqrt{p\cdot p}.$$

<u>Oletetaan:</u> $|x(0)| = 1$, ts. $x(0) \in \partial M$, $c(1)|p_0| =$



Olkoon $T_f > 0$ aika

$$T_f = \min\{t > 0 \mid |x(t)| = 1\}$$

<u>OLETUS</u>: Funktio $\dfrac{r}{c(r)}$ on kasvava välillä $r \in (0,1)$. (6)

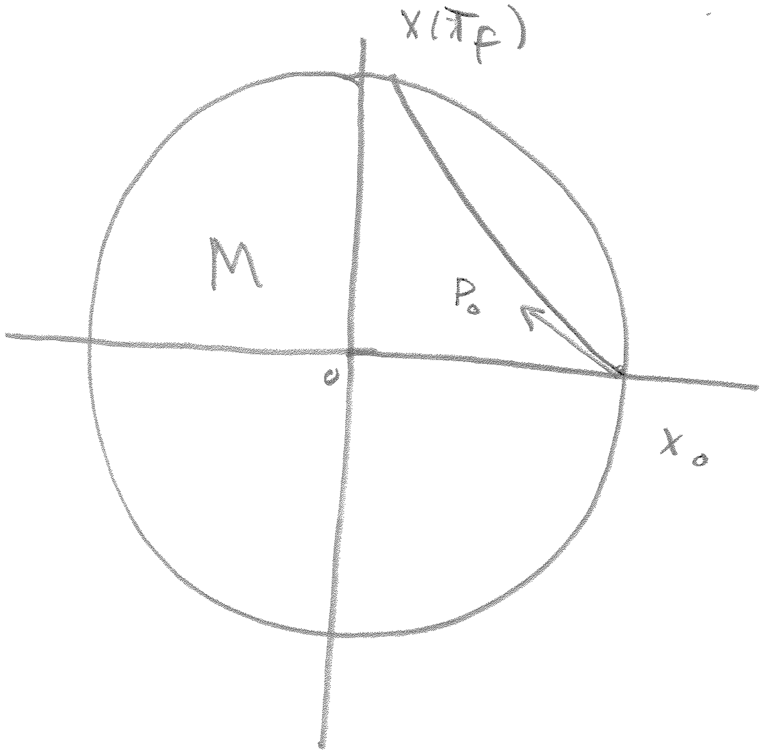
51) (Tämän tulkintaan palataan myöhemmin)

Oletetaan:

$$X_0 = (1, 0)$$

$$P_0 = (P_0^x, P_0^y), \quad P_0^x < 0$$

$$P_0^y > 0$$



T_f on paluuaika reunalle ∂M

Inversio-ongelma: Määrää $c(r)$ kun T_f tunnetaan P_0:n funktiona, eli $T_f(X_0, P_0)$ ja $c(1)$.

5.1 b)

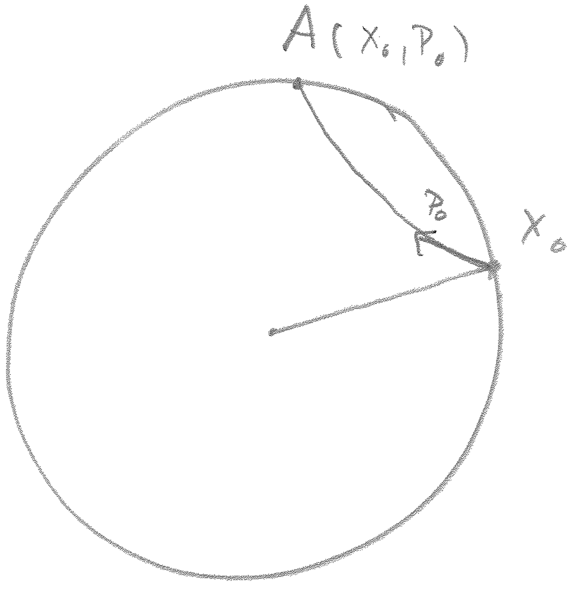
<u>Huomautus</u> Kun (6) on voimassa kuvaus

$$A(x_0, p_0) = (x_0, X(T_f)) \in \partial M \times \partial M$$

$$A: \left\{ (x_0, p_0) \;\middle|\; x_0 \in \partial M,\ c(1)|p_0| = 1,\ p_0 \cdot x_0 < 0 \right\} \to \partial M$$

on bijektio. Funktio $T_f(A^{-1}(z,y))$ on "läpikulkuaika" pisteestä $z \in \partial M$ pisteeseen $y \in \partial M$.

(HT)



<u>Lause 6.1</u> Olkoon (6) voimassa. Tällöin $c(1)$ ja funktio $T_f(x_0, p_0)$, $x_0 = (1,0)$, $p_0 \in \{ p_0 \in \mathbb{R}^2 \mid |p_0| = c(1)^{-1},\ p_0 \cdot x_0 < 0 \}$ määrää $c(r)$:n yksikäsitteisesti.

51 c)

Todistus:

Havaitsemme, että

$$\frac{\partial}{\partial t} H(x(t), p(t)) =$$

$$= \nabla_x H \cdot \dot{x} + \nabla_p H \cdot \dot{p}$$

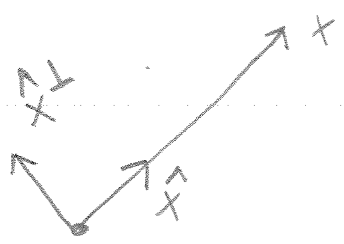
$$= \nabla_x H \cdot \nabla_p H + \nabla_p H \cdot (-\nabla_x H) = 0.$$

Siis $H(x(t), p(t)) = H_0 =$ vakio.

Valitaan hetkellä t yksikkökoordinaatti-vektorit

$$\hat{x} = \frac{x(t)}{|x(t)|}$$

$$\hat{x}^\perp = (\hat{x}(t))^\perp, \quad (a, b)^\perp = (-b, a)$$



Esitetään $p = p(t)$ ja $\hat{p} = \hat{p}(t)$ näissä koordinaateissa.

$$p = p_r \hat{x} + p_\theta \hat{x}^\perp$$

$$\hat{p} = \hat{p}_r \hat{x} + \hat{p}_\theta \hat{x}^\perp$$

(r, θ viittaavat "polaarikoordinaatteihin")

Tällöin (4) - (5) antavat

(7) $\dot{r} = c(r) \hat{k}_r \qquad \left(\Leftarrow \dot{x} = \dot{r}\hat{x} + r\dot{\hat{x}} = c(r)\hat{p} \right)$

(8) $$\frac{d}{dt}\left[r p_\theta \right] = \frac{d}{dt}\left[x^\perp \cdot p \right]$$

$$= \dot{x}^\perp \cdot p + x^\perp \cdot \dot{p}$$

$$= \underbrace{c(r)\hat{p}^\perp \cdot p}_{0} + \underbrace{x^\perp \cdot (-c'(r)|p|\hat{x})}_{0} = 0$$

Siis

$$r(t)\, p_\theta(t) = 1 \cdot p_\theta(0) = \text{vakio}. \qquad (9)$$

Tämä vastaa kulmamomentin säilymistä fysiikassa.

53)

Olkoon T_m aika, jolloin pätee

määritelmä

$$|X(T_m)| = \min |X(t)| =: r_m$$

Yhtälöä (4)–(5) tarkastelemalla nähdään, että

$$\dot{r}(T_m) = 0 \qquad (9)$$

$$\overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad \hat{p}_r(T_m) = 0 \qquad (10)$$

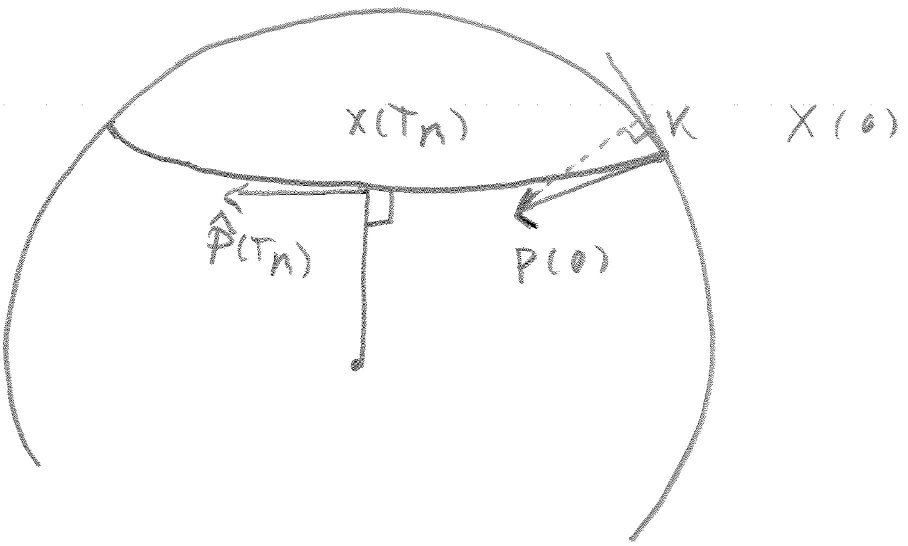
$$\overset{\|\hat{p}\|=1}{\Longrightarrow} \quad |\hat{p}_\theta(T_m)| = 1 \qquad (11)$$

ja että (Harjoitustehtävä, vihje: ajan kääntö)

$$|X(T_m + s)| = |X(T_m - s)|,$$

$$T_f = 2T_m \qquad (12)$$

Ts. hiukkaselta alas kulkeminen kestää yhtä pitkään kuin ylös palaaminen



Seuraavaksi merkitään

$$k = \hat{P}_\Theta(0). \qquad (13)$$

Alkuoletusten nojalla $k > 0$.

Koska $H(x(t), p(t)) = H_0 =$ vakio, on

$$c(r_m)\,|P(T_m)| = c(1)\cdot|P(0)| \qquad (14)$$

$$(10) \Rightarrow \quad |P_\Theta(T_n)| = |P(T_n)|$$

$$\overset{(9)}{\Longrightarrow} \quad r_m \cdot |P(T_n)| = 1 \cdot |P_\Theta(0)|$$

$$\overset{(14)}{\Longrightarrow} \quad \frac{r_m}{c(r_m)} = \frac{|P_\Theta(0)|}{|P(0)|\cdot c(1)} = \frac{k}{c(1)} \qquad (15)$$

Oletuksen (6) nojalla $\frac{r}{c(r)}$ on kasvava. Voimme siis määritellä funktion $R(k)$, jolle

$$\frac{R(k)}{c(R(k))} = \frac{k}{c(1)}. \qquad (16)$$

Tälle pätee $R(k) = r_m$ kun $k = \frac{P_\Theta(0)}{P(0)}$.

Nyt

$$(7) \Rightarrow \qquad \dot{r}(t) = c(r(t))\hat{p}_r(t)$$

$$= c(r)\sqrt{1 - \hat{p}_\theta(t)^2} \qquad (17)$$

Koska $\qquad c(r(t))\,|p(t)| = c(1)\cdot|p(0)| = H_0$

ja $\qquad (9) \Rightarrow \qquad r(t)\,p_\theta(t) = 1\cdot p_\theta(0)$

pätee

$$\frac{r\cdot\hat{p}_\theta}{c(r)} = \frac{\hat{p}_\theta(0)}{c(1)} \qquad (18)$$

eli

$$\hat{p}_\theta = \frac{c(r)}{c(1)\,r}\,\hat{p}_\theta(0). \qquad (19)$$

Siispä $(17) \Rightarrow$

$$\dot{r} = c(r)\sqrt{1 - \left(\frac{c(r)}{c(1)\cdot r}\,\hat{p}_\theta(0)\right)^2} \qquad (20)$$

Tämä on tavallinen diff. yhtälö $r = r(t)$:lle!

Tarkastellaan $r(t)$:n käänteisfunktiota $t(r)$. Datamme antaa $r(0) = 1$

$r(T_p(p_0)) = 1$

eri p_0:n arvoilla.

56)

Nyt

$$T_F(P_0) = 2T_m = 2\int_0^{T_m} dt$$

$$= 2\int_1^{r_m} t'(r)\,dr = 2\int_1^{r_m} \frac{dr}{r'(t(r))}$$

$$\overset{(20)}{=} 2\int_1^{r_m} \frac{dr}{c(r)\left(1-\left(\frac{c(r)}{c(1)r}\cdot\hat{P}_\theta(0)\right)^2\right)^{1/2}}$$

Tehdään muuttujan vaihto, uusi muuttuja on

$$u = \left(\frac{c(1)}{c(r)}r\right)^2 = \left(\overset{k}{\overset{\shortparallel}{R(\hat{P}_\theta(0))}}\right)^2, \quad (2$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{2r\cdot c(1)^2}{c(r)^2}\left(1-\frac{r\,c'(r)}{c(r)}\right) \quad (22)$$

Jolloin merkitsemällä $\kappa = \hat{p}_\theta(0)$

$$T_f(P_0) = 2\int_1^{\kappa^2} \frac{1}{c(r)} \frac{1}{\left(1-\kappa^2\frac{1}{u}\right)^{1/2}} \frac{dr}{du} \cdot du$$

$$= -\frac{2}{c(1)} \int_{\kappa^2}^{1} \underbrace{\left[\frac{u}{r}\frac{dr}{du}\right](u)}_{:= f(u)} \cdot \frac{1}{\sqrt{u-\kappa^2}}\, du$$

<u>Lause 6.2</u> Abelin integraaliyhtälön

$$If(x) = \int_x^1 \frac{f(y)}{(y-x)^{1/2}}\, dy = g(x)$$

ratkaisu on

$$f(y) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dy}\int_y^1 \frac{g(x)}{(x-y)^{1/2}}\, dx$$

Siis $-\frac{d}{dy} I^2 f = \pi f$

todistamme tämän myöhemmin.

Voimme siis ratkaista $f(u)$:n kaavalla

$$f(u) = -\frac{2}{\pi \cdot c(0)} \frac{d}{du} \int_u^1 \frac{T_f(\sqrt{k})}{\sqrt{k-u}} \, du$$

ja

$$f(u) = \frac{u}{r} \frac{du}{dr} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dr} = \dfrac{f(u)}{u} \cdot r & \text{eli} \quad \dfrac{u \, du}{f(u)} = r \, dr \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r(u) = \exp\left(\int_u^1 \frac{f(v)}{v} \, dv \right)$$

Funktion $r(u)$ käänteisfunktio $u(r)$ voidaan määrätä, samoin kuin

$$F(r) := f(u(r)) = \frac{u(r)}{r} \cdot \left(\frac{du}{dr}(r) \right)^{-1}$$

$$\overset{(22)}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{1 - r \frac{c'(r)}{c(r)}}$$

Tästä voidaan ratkaista $c'/c = (\ln c)'$ ja

$$c(r) = c(1) \cdot \exp\left(\int_1^r (\ln c(s))' \, ds \right).$$

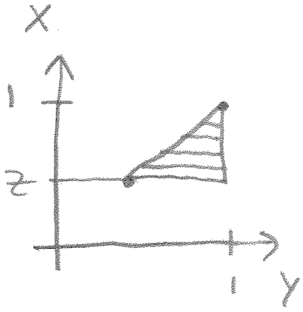
L. 61 $\square$

Todistus (Lause 6.2)

Suora lasku antaa

$$\int_z^1 \frac{g(x)}{(x-z)^{1/2}}\,dx = \int_z^1\int_x^1 \frac{f(y)}{(x-z)^{1/2}(y-x)^{1/2}}\,dx\,dy$$

$$= \int_z^1 k(z,y)\,f(y)\,dy,$$



missä

$$k(z,y) = \int_z^y \frac{dx}{\sqrt{(x-z)(y-x)}} =$$

$$t = \frac{x-z}{y-z}$$

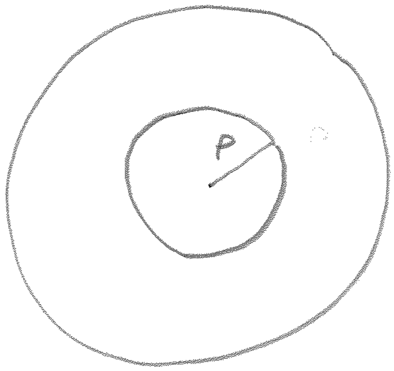
$$= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \pi.$$

Siis

$$\int_z^1 \frac{g(x)}{(x-z)^{1/2}}\,dx = \pi \int_z^1 f(y)\,dy.$$

Väite seuraa derivoimalla puolittain. □

Tulkinta: Oletus (6): $\frac{r}{c(r)}$ kasvava



Ympyrän $|x|=\rho$ pituus metriikassa

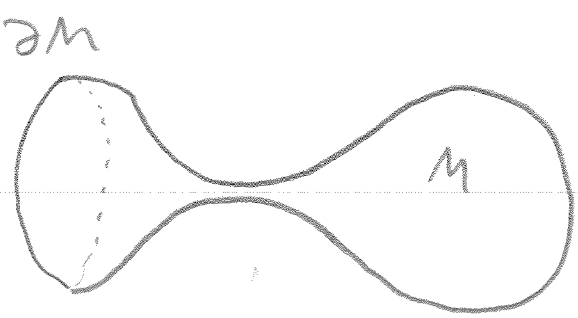
$$ds^2 = \frac{1}{c(|x|)^2}\, dx^2$$

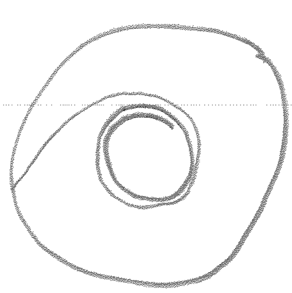
on $\frac{2\rho}{c(\rho)}$.

- Oletus (6) siis sanoo, että ympyrän $|x| = \rho$ "kiertämiseen kuluva aika nopeudella yksi" on kasvava funktio

Inversio-ongelma ei ole ratkeava

- "pussille" $M \subset \mathbb{R}^3$, joka on topologisesti kiekko.





"trapped rays"

Oheismateriaali:

Tutustu [Bal] - monisteen luvuihin 3.3 - 3.4

Idea: Muutetaan metriikkaa

$$ds^2 = \frac{1}{c(x)^2}(dx^2 + dy^2)$$

$$= n(x)^2(dx^2 + dy^2)$$

muutoksella

$$n(x) \longrightarrow n_\varepsilon(x) = n(x) + \varepsilon n_1(x), \quad \varepsilon > 0 \text{ pieni.}$$

Kulkuaika metriikka muuttuu:

$$ds_\varepsilon^2 = n_\varepsilon(x)^2(dx^2 + dy^2)$$

Olkoon $d_\varepsilon(y, z)$ pisteiden $y, z \in \partial M$ etäisyys tässä metriikassa ja $\gamma_{y,z}$ geodeesi metriikassa ds_0 pisteestä y pisteeseen z. Tällöin

$$d_\varepsilon(y, z) = d_0(y, z) + \varepsilon \cdot \int_{\gamma_{y,z}} n_1(x, y)\, ds_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Reunapisteiden etäisyyksien muutos on siis Ei-Euklidinen Radon-muunnos $n_1(x,y)$:stä Riemannin monistolla

$$\frac{d}{d\varepsilon} d_\varepsilon(y,z) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_{\gamma_{y,z}} n_1(x,y)\, ds_0$$