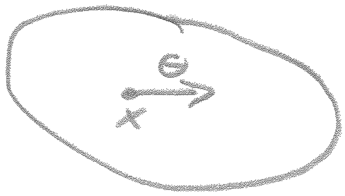
4 Radon-muunnos

Transmissiotomografiassa, esim. Röntgentomografiassa kappaleen läpi etenevää säteilyä mitataan. Jos säteet etenevät suoraan, eikä sirontaa tapahdu, säteilyn intensiteetti $u(x,\theta,t)$, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\theta\in S^{n-1}$, $t\in\mathbb{R}$ noudattaa yhtälöä



(1)

$$\partial_t u(x,\theta,t)+\theta\cdot\nabla_x u(x,\theta,t)+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{absorptio}}}{a(x)}\,u(x,\theta,t)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{lähde}}}{F(x,\theta,}$$

Esim. Olet. $a=0$, $F=0$. Silloin

$$(\partial_t+\theta\cdot\nabla_x)u(x,\theta,t)=0$$

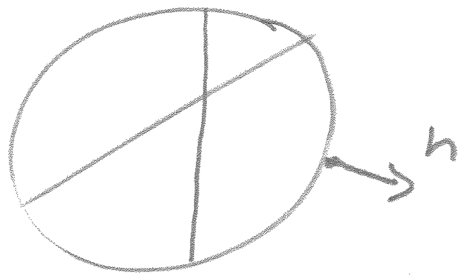
antaa

$$u(x,\theta,t)=h(\theta,x-t\theta)$$

Kiinteällä θ, tämä kuvaa suoralla $x=x_0+t\theta$ tapahtuvaa etenemistä.

Tarkastellaan tapausta, jossa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ts. $n = 2$, funktiot ovat ajasta riippumattomia, $u(x, \theta, t) = u(x, \theta)$ ja $F \equiv 0$, eli

$$(2) \qquad \theta \cdot \nabla_x u(x, \theta) + a(x) u(x, \theta) = 0, \qquad x \in \Omega, \ \theta \in S^1$$



ja reunalla pätee

$$(3) \qquad u(x, \theta) = f(x, \theta),$$

kun $(x, \theta) \in \partial_- S\Omega = \{ (x, \theta) \mid x \in \partial\Omega, \ n \cdot \theta < 0 \}$.

Oletetaan, että $\partial\Omega$ on C^∞ ja tiukasti konveksi, ts. kaarevuus on positiivinen.

Kullakin suoralla

$$(4) \qquad l_{x_0,\theta_0} = \{ x_0 + s\theta_0 \in \Omega \mid s > 0 \},$$

$$(x_0, \theta_0) \in \partial_- S\Omega$$

Saamme ratkaisun

(5)

$$u(x_0 + s\theta_0; \theta_0) = \exp\left(- \int_0^s a(x_0 + t\theta_0)\, dt \right) \cdot f(x_0, \theta_0)$$

⌈tee sijoitus yhtälöön (2) tai ratkaise TDY (2)⌋

Olet. $a \in C^\infty(\overline{\Omega})$

Inversio-ongelma Mitataan intensiteetti

$$u(x, \theta), \quad (x,\theta) \in \partial_+ S\Omega = \{ (x,\theta) \mid x \in \partial\Omega,\ n \cdot \theta > 0 \}$$

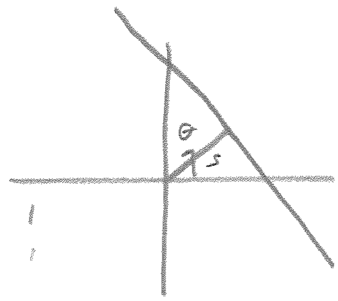
Jollakin f, $f \in C^\infty$, $f > 0$.

Voidaanko $a(x)$, $x \in \Omega$ määrätä tästä datasta?

Vaihtoehtoinen määrittely:

Olkoon $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Määritellään Radon-muunnos



$$Rf(s,\theta) = \int_{l_{\theta,s}} f \, dl$$

missä $l_{\theta,s} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot \theta = s\}$,

$\theta \in S^1$, $s \in \mathbb{R}$.

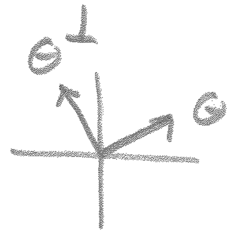
Siis,

$$Rf(s,\theta) = \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp)\, dt$$

(6) $$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \delta(x \cdot \theta - s)\, dx,$$

missä $\theta = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$\theta^\perp = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$



Joskus merkitsemme

(7) $$R_\theta f(s) = Rf(s,\theta).$$

26)

Lause 4.1 (Fourier slice theorem)

Olkoon $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Silloin

(8) $$[\mathcal{F}_{s\to\sigma} R_\theta f](\sigma) = \mathcal{F}_{x\to\xi} f(\sigma\theta), \quad \sigma\in\mathbb{R}, \quad x,\xi\in\mathbb{R}^n$$

eli

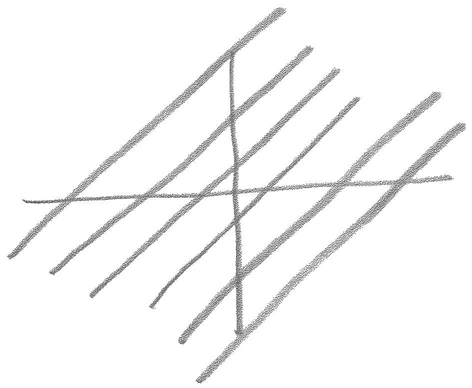
$$\widehat{R_\theta f}(\sigma) = \hat{f}(\sigma\theta)$$

Tod.

$$\widehat{R_\theta f}(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-is\sigma} \int_{\mathbb{R}} f(\overbrace{s\theta + t\theta^\perp}^{x,\ x\cdot\theta = s})\, dt\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\sigma\theta} f(x)\, dx$$

$$= \hat{f}(\sigma\theta). \quad \square$$



Inversio-ongelma Ol. $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$\hat{}_s$ $= Rf(s,\theta)$ annettu. Etsi f.

Ensimmäinen ratkaisu

Käännetään Fourier-muunnos:

$$f(x) = \left(\mathcal{F}_{x\to\xi}\right)^{-1}\left(\mathcal{F}_{x\to\xi} f\right) \tag{9}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-is\cdot\sigma} R_\theta f(s)\,ds\right]_{\xi = s\theta} d\xi.$$

Seuraavaksi kirjoitetaan (9) tehokkaammassa muodossa. (vrt. rajoitetun kulman tomografia)

Huomio Derivaatalle ja Radon-muunnokselle pätee

$$R_\theta\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right](s) = \theta_j \frac{d}{ds}(R_\theta f)(s)$$

Tod: HT, käytä Lausetta 2.4, tai laske R_θ:n määritelmän avulla

- Merkitään $Z = \mathbb{R} \times S^1$.

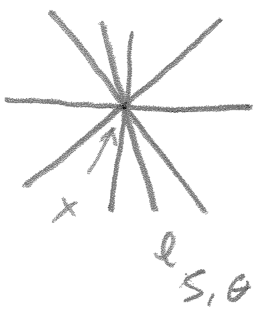
Määritellään funktiolle $g \in C_0^\infty(Z)$

$$R^* g(x) = \int_{S^1} g(x\cdot\theta, \theta)\, d\theta$$

$$:= \int_0^{2\pi} g(x\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi), \overset{\theta}{\overset{\shortparallel}{(\cos\varphi, \sin\varphi)}})\, d\varphi$$

- Tämä tarkoittaa:

$$R^* g(x) = \int_{S^1} \Big[g(s,\theta)\Big]_{x\in l_{s,\theta}}\, d\theta$$



29)

Huomaa:

$$\int_{S^1} h(s,\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} h(s,(\cos\varphi, \sin\varphi))\, d\varphi$$

R^*:ä sanotaan Radon-muunnoksen adjungaatiksi: Jos $g \in C_0^\infty(Z)$ ja $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, niin

$\langle R^* g, f \rangle$ (= reaalinen $L^2(\mathbb{R}^2)$-sisätulo / dualiteetti)

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \int_{S^1} g(x\cdot\theta, \theta)\, d\theta\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} \delta(s - x\cdot\theta)\, g(s)\, ds\, d\theta\, dx$$

$$= \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} g(s,\theta) \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, \delta(s - x\cdot\theta)\, dx \right) ds\, d\theta$$

$$= \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} g(s,\theta)\, (Rf)(s,\theta)\, ds\, d\theta$$

$= \langle g, Rf \rangle$ (= reaalinen $L^2(S^1 \times \mathbb{R})$-dualiteetti)

31)

Vaihtoehtoinen tapa:

Muuttujan vaihto

$$F : (x, \theta) \longmapsto (s, t, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$$

s.e. $x = s\theta + t\theta^\perp$. $\det(DF) = 1$

joten edellisessä lauseessa

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \int_{S^1} g(x \cdot \theta, \theta)\, d\theta\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{S^1} f(s\theta + t\theta^\perp)\, g(s, \theta)\, ds\, dt\, d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{S^1} g(s, \theta) \left[\int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp)\, dt \right] ds\, d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{S^1} g(s, \theta)\, Rf(s, \theta)\, ds\, d\theta.$$

31.1

Lause 4.1 Olkoon $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Tällöin

1)

$$R^* R f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2}{|x-y|} f(y)\, dy$$

$$= K * f(x), \quad K(y) = \frac{2}{|y|}$$

2)

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} \Delta_x \left(K * R^*(Rf)\right)(x)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \Delta_x \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x-y|} \int_{S^1} Rf(x\cdot\theta^\perp, \theta)\, d\theta\, dy$$

3)

$$f(x) = \Lambda R^* R f,$$

missä

$$\Lambda h = (\mathcal{F}_{x\to\xi})^{-1} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} |\xi| (\mathcal{F}_{x\to\xi} h)(\xi)\right)$$

kaavaa 3 kutsutaan filteröidyksi

takaisinprojektioksi.

ja

$$\int_{S^1} D_a f(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{S^1} \left(D_a f(\theta) + D_a f(-\theta) \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S^1} Rf(a \cdot \theta \,;\, \theta)\, d\theta$$

Siispä

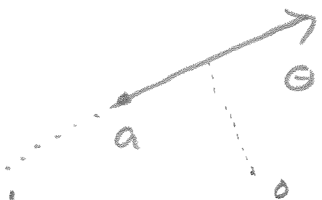
$$(R^* R f)(x) = \int_{S^1} Rf(x \cdot \theta, \theta)\, d\theta$$

$$= \quad K * f(x) .$$

Tod. 1 Tarkastellaan funktiota

$$D_a f(\theta) = \int_0^\infty f(a + t\theta^\perp)\,dt \quad , \quad a \in \mathbb{R}^2$$

Näemme, että



$$D_a f(\theta) + D_a f(-\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a + t\theta^\perp)\,dt$$

$$= R_\theta f\,(a\cdot\theta\,,\theta)$$

Toisaalta, $\left(\int_{S^1} d\theta = 2\pi \right)$

$$\int_{S^1} D_a f(\theta)\,d\theta = \int_{S^1}\int_0^\infty \frac{f(a + t\theta^\perp)}{t}\,t\,dt\,d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(a+y)}{|y|}\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y)}{|a-y|}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}(f * K)(a) \quad , \quad K(y) = \frac{2}{|y|}$$

2. Fourier-muunnokselle $\mathbb{R}^2$:ssa pätee (Ht)

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\left(\frac{1}{|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{|\xi|}.$$

Siispä

$$\widehat{k*f}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{|\xi|}\cdot\hat{f}(\xi)$$

ja

$$\mathcal{F}\big(k*(k*f)\big)(\xi) = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{|\xi|^2}\,\hat{f}(\xi).$$

Koska

$$\mathcal{F}(-\Delta f)(\xi) = |\xi|^2\,\hat{f}(\xi),$$

on

$$\mathcal{F}\left(-\frac{\pi}{4}\Delta\, k*(k*f)\right) = \hat{f}(\xi),$$

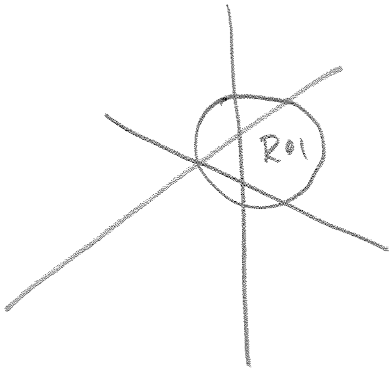
josta 2. seuraa.

3. Kuten 2.

$\square$

35)

Sovelluksia: Suunnataan säteitä vain kiinnostavan alueen (ROI = Region of interest) läpi. Voimme rekonstruoida funktion



$$R^* R f(x) = K * f(x)$$

kun $x \in ROI$

Tämä vähentää säteilyannosta kappaleessa ja pätee

$$\operatorname{sing\,supp}(R^* R f) = \operatorname{sing\,supp}(f)$$

singulaarinen kantaja, eli alue jonka ulkopuolella funktio on C^∞-sileä

tod: Mikrolokaalin analyysin kurssi, sivuutetaan tässä.