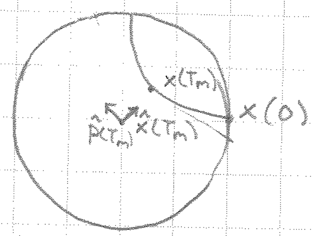
Mat-1.3345 Differentiaaliyhtälöiden inversio-ongelmat
HARJOITUS 5 15.10.2006

1. Funktion r minimoivan pisteen olemassaolo seuraa oletuksesta $(c(r)/r)' > 0$.

Määritellään

$$(x_+(t), p_+(t)) := (x(T_m+t), p(T_m+t))$$
$$(x_-(t), p_-(t)) := (x(T_m-t), -p(T_m-t))$$
$$(x_*(t), p_*(t)) := (Mx(T_m-t), -Mp(T_m-t)),$$

missä



$$M = I - 2\hat{u}\hat{u}^T, \quad \hat{u} = (\hat{x}^\perp(T_m))$$

(M peilaa akselin $\hat{x}(T_m)$ suhteen).

Peilaus säilyttää pituuden: $|Mx(t)| = |x(t)|$

Nyt kaikki kolme paria toteuttavat yhtälöt

$$\begin{cases} \dot{x} = c(r)\hat{p} \\ \dot{p} = -c'(r)|p|\hat{x} \end{cases} \qquad (1)$$

Epäselvin tapaus: $H = H(r, |p|)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= -M\dot{x}(T_m-t) \\ &= -M(\partial_1 H)(|x(T_m-t)|, |p(T_m-t)|)\,\hat{p}(T_m-t) \\ &= (\partial_1 H)(|Mx(T_m-t)|, |Mp(T_m-t)|)\frac{Mp(T_m-t)}{|Mp(T_m-t)|} \\ &= (\partial_1 H)(|x_*(t)|, |p_*(t)|)\,\hat{p}_*(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_*(t) &= M\dot{p}(T_m-t) = M(\partial_2 H)(|x_-(t)|, |p_-(t)|)\,x_-(t) \\ &= -(\partial_2 H)(|x_*(t)|, |p_*(t)|)\,\hat{x}_*(t) \end{aligned}$$

Systeemin (1) ratkaisut ovat 1-käs., joten $x_*(t) = x_+(t)$. Toisaalta $|x_+(t)| = |Mx_-(t)| = |x_-(t)|$.