Mat-1.3345 Diff. yhtälöiden inversio-ongelmat

HARJOITUS 4 11.10.2006

1. Olk. $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Osoita, että kertomisoperaattori $M_q u := qu$ on jatkuva $M_q : H^s(\mathbb{R}^2) \to H^s(\mathbb{R}^2)$, $s \in \mathbb{N}$

$$\|M_q u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^2)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^2} |D^\alpha(qu)(x)|^2 dx$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^2} \Big| \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha,\beta} D^\beta q \, D^{\alpha-\beta} u \Big|^2 dx$$

$$\leq C \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \text{ koska}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |(D^\beta q)(x)| < \tilde{C}, \ \forall \beta \leq \alpha$$

2. Osoita, että jos kaikille $f \in C_0^\infty(B(0,1))$ pätee

$$\| Rf \|_{H^{1/2}(Z)} \leq C \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

niin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva laajennus

$$R : L^2(B(0,1)) \to H^{1/2}(Z),$$

missä $L^2(B(0,1)) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid \operatorname{supp} f \subset \overline{B(0,1)} \}$ on $L^2(\mathbb{R}^2)$:n aliavaruus.

Huomioidaan $C_0^\infty(B(0,1))$ on tiheässä $L^2(B(0,1))$:ssä.

Todistetaan väite: Olk. X normiavaruus ja Y Banach-av. Olk. $A : D(A) \subset X \to Y$ lineaarinen rajoitettu operaattori. Silloin A:lla on 1-käs. laajennus lineaariseksi rajoitetuksi operaattoriksi $\bar{A} : \overline{D(A)} \subset X \to Y$.

Olk. $\bar{x} \in \overline{D(A)}$. Otetaan jono $\{x_n\} \subset D(A)$ s.e. $x_n \to \bar{x}$. Silloin $\{Ax_n\}$ on Cauchy-jono sillä $\| Ax_n - Ax_m \| = \| A(x_n - x_m) \| \leq \|A\| \| x_n - x_m \| \to 0$ kun $m,n \to \infty$. Määritellään $\bar{A}\bar{x} = \lim Ax_n$ (Y Banach).

$$\| \bar{A}\bar{x} \| = \lim \| Ax_n \| \leq C \lim \| x_n \| = C \| \bar{x} \|$$

3. Olk. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in L^2(B(0,1))$. Osoita, että $\hat{f}$ on laajennettavissa $\mathbb{C}^2$:n analyyttiseksi* funktioksi.

Jos $f \in L^2(B(0,1))$, niin

$$\hat{f}(\xi) = \int_{B(0,1)} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx.$$

Merk. $\xi_1 = a_1 + ib_1$, $\xi_2 = a_2 + ib_2$.

Cauchy-Riemann: $\hat{f}$ on analyyttinen

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\partial}\hat{f} = 0.$$

Siis: $\xi_1 \mapsto \hat{f}(\xi_1, \eta_2)$ on analyyttinen, joss

$$\bar{\partial}_{\xi_1}\hat{f}(\xi_1,\eta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_1} + i\frac{\partial}{\partial b_1}\right)\int_{B(0,1)} e^{-i(x_1(a_1+ib_1)+x_2\eta_2)} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{B(0,1)} (-ix_1 + ix_1)\, e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx = 0$$

Vastaavasti

$$\bar{\partial}_{\xi_2}\hat{f}(\eta_1,\xi_2) = \frac{1}{2}\int_{B(0,1)} \left(\frac{\partial}{\partial a_2} + i\frac{\partial}{\partial b_2}\right) e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx = 0$$

$\Rightarrow$ $\hat{f}$ on laajennettavissa $\mathbb{C}^2$:n analyyttiseksi funktioksi.

*[$\mathbb{C}^2$:n analyyttisyys $=$ $z_1 \mapsto f(z_1,\eta_2)$, $z_2 \mapsto f(\eta_1, z_2)$ analyyttisiä]

4. (DEMO) Olk. $f \in L^2(B(0,R))$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Osoita, että arvot $Rf(s,\theta)$, $(s,\theta) \in T_\varepsilon$, missä $T_\varepsilon = \{(s,\theta) \mid s \in \mathbb{R}, \theta = (\cos\alpha, \sin\alpha), |\alpha| < \varepsilon\}$ määräävät f:n 1-käsitteisesti. Lisäksi: onko kuvaus $R: L^2(B(0,R)) \to L^2(Z)$, $R: f \mapsto Rf|_{T_\varepsilon}$, hyvin asetettu?

Fourier slice theorem:

$$\widehat{R_\theta f}(\sigma) = \hat{f}(\sigma\theta)$$

$\Rightarrow \hat{f}$ tunnetaan pisteissä $\hat{T}_\varepsilon = \{\xi \mid |\xi_1| \leq \overset{\text{„}\tan\alpha\text{?}}{c} |\xi_2|\}$

Yksikäsitteisyys: Olet. että g ja h tuottavat saman datan, kun $(s,\theta) \in T_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \quad \hat{f}(\xi) := \hat{g}(\xi) - \hat{h}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \hat{T}_\varepsilon$$

Olk. $\rho \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ s.e. $]\rho-\delta, \rho+\delta[\times]-\delta, \delta[\subset \hat{T}_\varepsilon$

Määr. $\hat{f}_{\eta_2}(\xi_1) := \hat{f}(\xi_1, \eta_2)$ ja $\hat{f}_{\eta_1}(\xi_2) := \hat{f}(\eta_1, \xi_2)$.

1) Kiinnitä $\eta_2 \in]-\delta, \delta[$.

$$\hat{f}_{\eta_2} \equiv 0 \quad \text{kun } \xi_1 \in]\rho-\delta, \rho+\delta[\times \{0\} \subset \mathbb{C}$$

3. teht. $\Rightarrow \hat{f}_{\eta_2}$ on analyyttinen

$$\Rightarrow \hat{f}_{\eta_2} \equiv 0 \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{C}$$

2) Valitaan $\eta_1 \in \mathbb{C}$:

$$\hat{f}_{\eta_1}(\xi_2) = 0 \quad \text{kun } \xi_2 \in]-\delta, \delta[\times \{0\}$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{\eta_1} \equiv 0 \quad \forall \xi_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \hat{f} \equiv 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^2$$

R on injektiivinen, muttei surjektiivinen:

Jos $Rf(s,\theta) \neq 0$, $s > R \Rightarrow f \notin L^2(B(0,R))$