Mat-1.3345 Diff. yht. inversio-ongelmat
Harjoitus 3
4.10.2006

1. Huom. tehtävässä tulisi olla myös reunaehdot

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm ik\right) g(x) = 0, \quad |x| \geq L.$$

Merk. (myös teht. 2)

$$L_c = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{k^2}{c(x)^2}, \quad L = \frac{d^2}{dx^2} + k^2.$$

Merk. $g_y(x) := g(x,y)$.

Olk. g tehtävän

$$L_c u = f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \left(\Rightarrow u \in C_0^\infty(\mathbb{R})\right) \qquad (1)$$

Greenin funktio

$$\Rightarrow u(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y) f(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x,y) L_c u(x)\, dx$$

$$= \langle g_y, L_c u \rangle = \langle L_c^T g_y, u \rangle = \langle L_c g_y, u \rangle$$

$\Rightarrow$ g_y ratkaisee tehtävän

$$L_c g_y = \delta_y \quad D'\text{:ssä}. \qquad (2)$$

Ratkaistakseen tehtävän (2) riittää konstruoida tehtävän (1) Greenin funktio.

"Tämä menee L4-tiedoilla."

Lagrangen identiteetti:

$$v_0 L_c v_1 - v_1 L_c v_0 = \frac{d}{dx}\left(v_0' v_1 - v_1' v_0\right)$$

$$L v_0 = L v_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_0' v_1 - v_1' v_0 = C = \text{vakio}$$

Olk. $g(x,y) = \begin{cases} c\, v_0(x) v_1(y), & x > y, \\ c\, v_0(y) v_1(x), & x \le y, \end{cases}$

missä

$$L_c v_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} - ik\right) v_0(x) = 0, \quad x \le -L$$

$$L_c v_1 = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + ik\right) v_1(x) = 0, \quad x \ge L$$

$$v_0 f = v_0 L u - u L v_0 = \frac{d}{dx}\left(v_0' u - u' v_0\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-L}^{x} v_0(s) f(s)\, ds = (v_0' u - u' v_0)(x) - \overbrace{(v_0' u - u' v_0)(-L)}^{=0}$$

$$= v_0'(x) u(x) - u'(x) v_0(x)$$

Samoin

$$\int_{x}^{L} v_1(s) f(s)\, ds = -\left[v_1'(x) u(x) - u'(x) v_1(x)\right]$$

Saadaan

$$\tilde{C}u(x) = [v_1(x)v_0'(x) - v_0(x)v_1'(x)]u(x)$$

$$= v_1(x)\int_{-L}^{x} v_0(s)f(s)\,ds + v_0(x)\int_{x}^{L} v_1(s)f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow g(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{C}} v_0(x)v_1(y), & x > y, \\ \frac{1}{\tilde{C}} v_0(y)v_1(x), & x \le y. \end{cases}$$

Funktiot $v_0, v_1 \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow$ tulos.

2. Tehtävän asettelussa on "pikkuvikaa":

- reuna-arvot olet. kuten prujuissa
- integraali tulisi olla

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left[(L_c g(x,y)) g_0(x,z) - g(x,y) L g_0(x,z) \right] dx$$

- funktiot hajoitetaan erikseen (tarvitaan $\chi_1, \chi_2, \tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$)
- Lippmann-Schwingerissä g ja g_0 väärillä merkeillä

Olk. $\chi_1 = 1$ kun $|t-y| < \varepsilon$, $\tilde{\chi}_1 = 1$ kun $|t-z| < \varepsilon$
$\chi_1 = 0$ kun $|t-z| < \varepsilon$, $\tilde{\chi}_1 = 0$ kun $|t-y| < \varepsilon$

ja $\chi_1, \tilde{\chi}_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Olk. $\chi_2 = 1 - \chi_1$, $\tilde{\chi}_2 = 1 - \tilde{\chi}_2$.

Ongelma siis on, että g_0 ja g eivät ole testifunktioita $\Rightarrow$ distribuutiodualiteettia ei voi kirjoittaa suoraan.
Tähän tarvitaan hajoitelmaa.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}} (L_c g)(\chi_1 g_0 + \chi_2 g_0) + \underbrace{(L g_0)}_{=0}(\chi_1 g + \chi_2 g)\, dx \\
&= \langle \delta_y, \underbrace{\chi_1 g_0}_{\in C_0^\infty} \rangle + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (L_c g)(\chi_2 g_0)\, dx}_{=0} \\
&\quad - \langle \delta_z, \underbrace{\tilde{\chi}_1 g}_{\in C_0^\infty} \rangle - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (L g_0)(\chi_2 g)\, dx}_{=0} \\
&= \langle \delta_y, \chi_1 g_0 \rangle - \langle \delta_z, \tilde{\chi}_1 g \rangle = g_0(y,z) - g(z,y)
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$I = \int_{\mathbb{R}} \Big[\left(k^2 - \frac{k^2}{c(x)^2}\right) g_0 g + \overbrace{g_0 \Delta_x g - g \Delta_x g_0}^{\text{integraalit kumoavat toisensa}} \Big] dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} a(x) g_0(x,z) g(x,y)\, dx$$

3. Todista

$$\underline{R_\theta\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(s) = \theta_j \frac{d}{ds}\left(R_\theta f\right)(s)}$$

$$F_{s\to\sigma}\left[R_\theta\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\right](\sigma) = \widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)}(\sigma\cdot\theta)$$

$$= i\sigma\theta_j \hat{f}(\sigma\theta)$$

$$R_\theta\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(s) = F^{-1}_{\sigma\to s}\left[i\cdot\theta_j \hat{f}(\cdot\theta)\right](s)$$

$$= \frac{i\theta_j}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma s}\,\sigma \iint_{\mathbb{R}\mathbb{R}} e^{-i(t\theta^\perp+\tilde{s}\theta)\cdot(\sigma_j\theta)} f(t\theta^\perp+\tilde{s}\theta)\,d\tilde{s}\,dt\,d\sigma$$

$$= \theta_j \frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}} f(t\theta^\perp+\tilde{s}\theta)\,dt$$

$$= \theta_j \frac{d}{ds} R_\theta(s)$$

4. Todistetaan kaksi Fourier-muunnoksen ominaisuutta

1) Jos $f(\lambda x) = \lambda^a f(x)$, $\lambda > 0$, niin

$$[\mathcal{F}f](\lambda\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot(\lambda\xi)} f(x)\,dx \qquad \begin{array}{l} y = \lambda x \\ dy = \lambda^2 dx \end{array}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-iy\cdot\xi} f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \lambda^{-2} dy$$

$$= \lambda^{-a-2} \mathcal{F}f(\xi)$$

2) Jos f on rotaatioinvariantti eli $f(Tx) = f(x), \forall T : |\det T| = 1$, silloin

$$[\mathcal{F}f](T\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot T\xi} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(T^T x)\cdot\xi} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-iy\cdot\xi} f((T^T)^{-1} y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-iy\cdot\xi} f(y)\,dy = [\mathcal{F}f](\xi)$$

$f(x) = \frac{1}{|x|}$ on lokaalisti integroituva

$\Rightarrow f \in S'(\mathbb{R}^2)$

f voidaan jakaa kahtia:

$f = g_1 + g_2$, $g_1 = f\chi_{\overline{B(0,1)}}$, $g_2 = f\chi_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)}$

Nyt $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow \mathcal{F}f = \hat{g}_1 + \hat{g}_2$ S':ssa

Toisaalta $\hat{g}_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ ja $\hat{g}_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, joten
$\mathcal{F}f$ on lok. integroituva $\Rightarrow \mathcal{F}f \in S'(\mathbb{R}^2)$
$\mathcal{F}f$:ää toteuttaa ominaisuuden 1) arvolla $a = -1$

$\Rightarrow \mathcal{F}f(\xi) = |\xi|^{-1} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$

$\mathcal{F}f$ on radiaalinen

$\Rightarrow \mathcal{F}f(\xi) = C \cdot |\xi|^{-1}$