Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3345 Differentiaaliyhtälöiden inversio-ongelmat **Lassas/Helin**
Harjoitus 3
Ke 4.10.2006 klo 14-16 U345

1. Olkoon $c(x) - 1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 < c_1 \le c(x) \le c_2$ ja

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{k^2}{c(x)^2}\right) g(x) = \delta_y(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että $g \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{y\})$.

Vihje: Esitä Greenin funktio $g(x) = g(x,y)$ kuten L4-kurssilla muodossa

$$g(x,y) = \begin{cases} cv_0(x)v_1(y), & x > y, \\ cv_0(y)v_1(x), & x \le y, \end{cases}$$

missä v_0 ja v_1 ovat tehtävän

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{k^2}{c(x)^2}\right) v_j(x) = 0, \quad x \in [-L_1, L_2]$$

ratkaisuja sopivilla $L_1, L_2 > 0$ sopivin reuna-arvoin.

2. Olkoon $c(x) - 1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $c(x) > 0$ ja

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{k^2}{c(x)^2}\right) g(x,y) = \delta_y(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + k^2\right) g_0(x,z) = \delta_z(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

missä $y, z \in \mathbb{R}$, $y \neq z$. Olkoon $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ funktio, jolle $\chi_1(t) = 1$ kun $|t-y| < \epsilon$ ja $\chi_1(t) = 0$ kun $|t-z| < \epsilon$ jollakin ϵ. Olkoon $\chi_2 = 1 - \chi_1$. Kirjoita integraali

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{k^2}{c(x)^2}\right) g(x,y) g_0(x,z) - g(x,y) \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - k^2\right) g_0(x,z) \right] \mathrm{d}y$$

distribuutiodualiteettina hajoittamalla

$$g(x,y) = \chi_1(x)g(x,y) + \chi_2(x)g(x,y) \quad \text{ja}$$

$$g_0(x,z) = \chi_1(x)g_0(x,y) + \chi_2(x)g_0(x,y)$$

sekä näytä Lippmann-Schwingerin kaava

$$g(z,y) - g_0(y,z) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)a(x)g_0(x,z)\mathrm{d}x,$$

missä $a(x) = k^2 \left(\frac{1}{c(x)^2} - 1\right)$. Huomaa, että Greenin funktioille pätee symmetria $g_0(z,y) = g_0(y,z)$ ja $g(z,y) = g(y,z)$.

3. Osoita, että

$$R_\theta\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(s) = \theta_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(R_\theta f\right)(s).$$

4. (Demo) Osoita, että $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$:ssa pätee

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\left(\frac{1}{|x|}\right) = c\cdot\frac{1}{|\xi|}, \quad c \neq 0.$$