Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3345 Differentiaaliyhtälöiden inversio-ongelmat **Lassas/Helin**
Harjoitus 1
Ke 20.9.2006 klo 14-16 U345

1. Osoita Fourier-muunnokselle, että

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

on jatkuva, ts. kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ on olemassa $m, \tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, ..., m$, $C_{\alpha,\beta} > 0$ siten että

$$||\mathcal{F}u||_{\alpha,\beta} \leq C_{\alpha,\beta} \left(\sum_{j=1}^{m} ||u||_{\tilde{\alpha}_j,\tilde{\beta}_j} \right).$$

2. Laske

a) $\mathcal{F}(\delta_0), \quad \delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

b) $\mathcal{F}(H), \quad H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ ja

c) (Demotehtävä) $\mathcal{F}\left(\text{p.v.}\frac{1}{x}\right)$.

3. a) Jos $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, niin

$$\delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} = \delta_{(x_0,y_0)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2).$$

b) Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ja $\phi_j(x) = j\phi(jx)$. Osoita

$$\lim_{j\to\infty} \phi_j = \delta_0 \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R})\text{:ssä.}$$

4. Osoita

a)

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \left(\frac{1}{2}|x|\right) = \delta_0 \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R})\text{:ssä sekä}$$

b)

$$\Delta\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right) = \delta_0 \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)\text{:ssa.}$$