(K) = Kotitehtävä. Palautettava kirjallisena viimeistään k.o. laskuharjoituskerran alussa.

1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $D(\Omega)$ sileiden ja kompaktikantajaisten funktioiden joukko Ω:ssa. Tällöin kuvaus $\psi : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ on distribuutio, jos se on lineaarinen ja jos seuraava jatkuvuusehto pätee:

   Jokaisella kompaktia joukkoa $M \subset \Omega$ kohti on olemassa luku $m = m(M) \in \mathbb{N}$ ja vakio $C = C(M) < \infty$, joille pätee

   $$|\psi(\varphi)| \le C \max_{|\alpha|\le m} \max_{x\in M} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

   kaikille $\varphi \in D(\Omega)$, joilla $supp(\varphi) \subset M$.

   (a) Näytä, että jos ψ on distribuutio, niin silloin myös $\partial^\alpha \psi$, joka määritellään kaavalla

   $$< \partial^\alpha \psi, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < \psi, \partial^\alpha \varphi >,$$

   on distribuutio.

   (b) Olkoon $\Omega = \mathbb{R}$ $(n = 1)$. Millä ehdolla

   $$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k (x - a_k)$$

   on distribuutio?

2. Käyttäen apuna funktiota

   $$\phi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}$$

   konstruoi $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot

   $$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= 1, && \text{kun } |x-x_0| \le \frac{\varepsilon}{2},\ |y-y_0| \le \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 < \varphi(x,y) &< 1, && \text{kun } |x-x_0|, |y-y_0| \in \left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\right) \\ \varphi(x,y) &= 0, && \text{kun } |x-x_0| \ge \frac{\delta}{2},\ |y-y_0| \ge \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

   Tässä $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$, $\delta > \varepsilon$ ovat mielivaltaisia.

3. **(K)** Olkoon $\Omega^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > ax\}$, $\Omega^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < ax\}$ ja olkoon u yhtälön

   (a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (b) $u_{yy} - c^2 u_{xx} = 0$ $(c \in \mathbb{R})$

   distribuutioratkaisu $\mathbb{R}^2$:ssa. Oletetaan lisäksi, että $u = u^+$ joukossa Ω^+ ja $u = u^-$ joukossa Ω^-, missä u^+, u^- ovat kahdesti jatkuvasti derivoituvia osa-alueiden rajoille asti. Millaisia jatkuvuus- tai hyppyehtoja u:n on toteutettava rajaviivalla $\Gamma : y = ax$?

4. Näytä, että jokaisella $0 \le \alpha \le 1$,

   $$u_\alpha(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \ge t \\ x/t, & \text{kun } \alpha t \le x \le t \\ \alpha, & \text{kun } 0 < x < \alpha t \\ -u_\alpha(t,-x), & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

   on alkuarvotehtävän $u_t + uu_x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$,

   $$u(0,x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

   distribuutioratkaisu.

5. Ratkaise Burgersin yhtälö $u_t + uu_x = 0$ $(x \in \mathbb{R}, t > 0)$ alkuehdolla

   $$u(0,x) = \begin{cases} 3, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

   Vihje: (Fysikaalisesti oikea) ratkaisu on paloittain vakio.