(K) = Kotitehtävä. Palautettava kirjallisena viimeistään k.o. laskuharjoituskerran alussa.

1. Lentävän koneen siipinä on kaksi kulmanopeudella ω pyörivää R- säteistä sylinteriä (pyörimissuunta sopiva). Laske 2D- ideaalivirtausmallin mukainen nopeusvektorikenttä $\vec{v} = (u, v)$. Tuo mukaan jokin (sopivan tuntuinen) lisähypoteesi, jotta ideaaliratkaisu olisi yksikäsitteinen. Jos $R = 2$m ja siivet ovat 10m pituisia, niin mikä on kulmanopeuden ω oltava, jotta 50 000 kg painava kone pääsisi ilmaan nopeuden ollessa 200 km/h?

2. **(K)** Olkoon $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ -1 < y < 1\}$ ja $k(x, y) = k >> 1$ kun $y > 0$ ja $k(x, y) = 1$ kun $y < 0$ ja $(x, y) \in \Omega$. Edelleen olkoon $f(x, y) = F =$ vakio, kun $y > 0$ ja $f(x, y) = 0$ kun $y < 0$. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (k\nabla u) &= f \text{ joukossa } \Omega \\ u &= 0 \text{ reunalla } \Gamma = \partial\Omega\end{aligned}$$

ja tutki erityisesti miten ratkaisu käyttäytyy materiaalirajan $y = 0$ lähellä. Vihje: Ratkaisu on varsin säännöllinen x-suunnassa. Kehitä sinisarjaksi tässä suunnassa!

3. Kaksiulotteisessa “putkessa” $\Omega = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < y < a\}$ virtaa vakionopeudella $\vec{v} = U\vec{e}_x$ (ideaalivirtaus!) nestettä, jonka lämpötila on ϕ. Putki on lämpöeristetty muualla, paitsi välillä $0 < x < L$, jolla välillä putkea ympäröi erittän hyvä lämmönjohde. Tämän johdosta on $\phi = 0$ reunan osalla $0 < x < L$. Oletetaan, että $\phi(0, y) = \phi_0$ =vakio, jolloin välillä $0 < x < L$ saadaan diffuusio-konvektio-ongelma

$$\begin{aligned}U\frac{\partial\phi}{\partial x} &= k\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\ 0 < x < L,\ 0 < y < a \\ \phi(x, 0) &= \phi(x, a) = 0,\ 0 < x < L \\ \phi(0, y) &= \phi_0,\ 0 < y < a.\end{aligned}$$

Tässä k on nesteen lämmönjohtavuus, ja on oletettu, että virtauksen suunnan dominoi konvektio. Muunna ongelma dimensiottomaksi käyttäen pituusyksikkönä putken leveyttä a. Ratkaise ongelma rajakerrosteorian avulla (siis olettaen ko. teoria soveltuvaksi). Päättele ratkaisusta, millaisilla ehdoilla rajakerrosratkaisu on pätevä.

4. Rajakerrosongelman

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0,\ \text{kun } y > 0, \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= \gamma\Delta u,\ \text{kun } y > 0, \\ u &= v = 0 \text{ kun } y = 0, \\ u &\to U = \text{vakio},\ v \to 0 \text{ kun } y \to \infty\end{aligned}$$

ratkaisu on muotoa

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

Näytä, että muunnoksilla

$$\eta = u\left(\frac{U}{\gamma x}\right)^{1/2},\ f = \frac{\phi}{(U\gamma x)^{1/2}} = f(x, \eta)$$

ongelma yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3} + \frac{1}{2}f\frac{\partial f}{\partial\eta} &= 0,\ \eta > 0 \\ f &= f_\eta = 0,\ \text{kun } \eta = 0 \\ f_\eta &\to 1,\ \text{kun } \eta \to \infty\end{aligned}$$

Ratkaise siis ongelma!

5. Laske rajakerrosteorialla siipiin vaikuttava kitkavoima tehtävässä 1. Oletetaan, $\rho = 1kg/m^3$ ja $\mu = 2 \times 10^{-5}kgm^{-1}s^{-1}$, muut numeroarvot kuten tehtävässä.