(**K**) = Kotitehtävä. Palautettava kirjallisena viimeistään k.o. laskuharjoituskerran alussa.

1. Paperimassa käyttäytyy todellisuudessa viskoelastisesti, mutta sen virtausta voi yrittää kuvata myös kahden nesteen mallilla (kaksifaasivirtauksena) seuraavasti: Ajatellaan paperikuitujen muodostavan "kuitunestettä", jonka tiheys on ρ ja virtausnopeus $\vec{v}$, kuitujen välisen tilan täyttää vesi, jonka tiheys on ρ_0 ja virtausnopeus $\vec{Q}$. Oletetaan kuitujen tilavuusosuus niin pieneksi, että veden virtausta voidaan pitää kokoonpuristumattomana, eli ρ_0 =vakio. "Kuituneste", eli kuitujen muodostama massa, oletetaan vapaasti (ilman kitkavastusta) kokoonpuristuvaksi. Vaikuttaviksi sisäisiksi voimiksi oletetaan "kuitenesteen osalta" sisäiset kitkavoimat (viskositeetti = μ) sekä kuitujen ja veden välinen kitkavoima $\vec{F}$. Veteen kohdistuvaksi oletetaan $\vec{F}$:n vastavoiman, sekä painegradientin. Ulkoiseksi voimaksi oletetaan gravitaatio $\vec{f}$ $[N/kg]$. Vielä oletetaan, että veden ja kuitujen välinen kitkavoima $\vec{F}$ on verrannollinen nopeuseroon $\vec{v} - \vec{Q}$ kertoimella k (Dareyn laki vuotovirtaukselle).

   (a) Oletetaan, että μ, k ovat vakioita. Kirjoita stationaarisen virtauksen massan säilymislait (2 kpl) ja liikemäärän säilymislait eli voimatasapainoyhtälöt (2 kpl). Eliminoi yhtälöistä $\vec{F}$ ja $\vec{Q}$, eli muodosta "kuitunesteen" virtausta kuvaava systeemi. Oletetaan virtaus sen verran hitaaksi, että (inertia)termi $\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ voidaan jättää voimatasapainossa huomiotta.

   (b) Voi arvella, että μ ja k kasvavat, mahdollisesti voimakkaastikin, ρ:n kasvaessa, eli $\mu = \mu(\rho)$ ja $k = k(\rho)$. "Ravistele" em. säilymislakien muodostama systeemi mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon ottaen tämä riippuvuus huomioon.

2. Pitkässä putkessa
$$\Omega = \{(x,y,z) | x \in \mathbb{R}, (y,z) \in \omega \subset \mathbb{R}^2\}$$
on massan ja liikemäärän säilymislaeilla(vakiolämpötilassa) hyvin yksinkertaiset asymptoottiset, stationaariset ratkaisut. Millaiset ne ovat a) oikeiden (kitkallisten) säilymislakien b) kitkattomien ideaalivirtausmallin mukaisesti?

3. (**K**)Olkoon $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0,\ x^2+y^2 > R^2\}$ ja $\Gamma = \Omega$:n (ala)reuna. Ratkaise ideaalivirtausongelma
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \text{ joukossa } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \text{ joukossa } \Omega, \\ n_x u + n_y v &= 0 \text{ reunalla } \Gamma \\ u \to U &= \text{vakio }, v \to 0, \text{ kun } x^2+y^2 \to \infty, y > 0 \end{aligned}$$
Vihje: Potentiaali on napakoordinaatistossa muotoa $\Phi = \phi(r)\cos\theta$.

4. Näytä, että virtauksen ollessa stationaarista, kokoonpuristumatonta, kitkatonta ja vapaata (ei ulkoisia voimia), on $p + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2$ vakio pitkin virtaviivoja.

5. Lentokoneen siiven ideaalivirtausongelmassa on yleinen potentiaaliratkaisu muotoa $u = U + \frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$, missä Φ toteuttaa yhtälöt
$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0 \text{ siiven ulkopuolella} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= -Un_x \text{ siiven pinnalla } \Gamma, \\ \Phi &\to 0, \text{ kun } x^2+y^2 \to \infty. \end{aligned}$$
Määritä Φ:n asymptoottinen muoto kaukana siivestä käyttämällä Greenin kaavoja. Näytä erityisesti, että $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y \sim r^{-2}$ kun $r = (x^2+y^2)^{1/2} \to \infty$.