(K) = Kotitehtävä. Palautettava kirjallisena viimeistään k.o. laskuharjoituskerran alussa.

1. Suure ϕ on skalaari, $\vec{v}$ vektori ja $\vec{\vec{\sigma}}$ on tensori, jos koordinaatistoa kierrettäessä ϕ pysyy muuttumattomana ja $\vec{v}$:n ja $\vec{\vec{\sigma}}$:n koordinaatistoesitykset muuttuvat säännöillä
$$\underline{v}' = \underline{\underline{S}}\,\underline{v}, \qquad \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{S}}^T,$$
missä S on unitaarinen koordinaatiston muunnosmatriisi. Näytä, että
   (a) (K) $\nabla \cdot \vec{v}$ on skalaari.
   (b) Div $\vec{\vec{\sigma}} = (\partial_j \sigma_{ij})_{i=1}^n$ on vektori.
   (c) Grad $\vec{v} = (\partial_i v_j)_{i,j=1}^n$ on tensori.

2. Näytä oikeaksi
   (a) (K) $\int_V \text{Div}\, \vec{\vec{\sigma}}\, \mathrm{d}V = \int_S \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$ (Gauss)
   (b) $\int_V (\text{Div}\, \vec{\vec{\sigma}}) \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}V = \int_S (\vec{\vec{n}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}S - \int_V \vec{\vec{\sigma}} : (\text{Grad}\, \vec{v})^T\, \mathrm{d}V$
   (c) $\int_V (\text{Grad}\, \vec{u}) \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}V = \int_S (\vec{n}\vec{u}) \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}S - \int_V (\text{Grad}\, \vec{v}) \cdot \vec{u}\, \mathrm{d}V$ (osittaisintegrointi)

3. (K) Näytä, että kun
$$\vec{\vec{\tau}} = \lambda \nabla \cdot \vec{v} + 2\mu \vec{\vec{\varepsilon}}(\vec{v}),$$
missä $\vec{\vec{\varepsilon}}(\vec{v}) = \left(\frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)\right)_{i,j=1}^n$, niin liikemäärän säilymislaissa voidaan kirjoittaa
$$\text{Div}\, \vec{\vec{\tau}} = \mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}).$$

4. Tunnetun virtauskentän $\vec{v} = \vec{v}(t, x, y, z)$ mukana kulkeutuu saastetta, jonka paino-osuus virtaaavasta alueesta on $c = c(t, x, y, z)$. Paitsi kulkeutumalla virran mukana, saaste leviää myös diffuusion
$$\vec{Q} = -k \nabla c$$
välityksellä. Lisäksi saaste hajoaa kemiallisesti konsentraatioon c verrannollisella nopeudella. Johda saasteen säilymislaki tarkastelemalla kiinteää kuutiotilavuutta V.

5. Kirjoita yksiulotteiset ideaalikaasun virtauksen perusyhtälöt tiheydelle $\rho = \rho(t, x)$, nopeudelle $u = u(t, x)$ ja paineelle $p = p(t, x)$ vakiolämpötilassa. Oletetaan, että u on pieni ja paine ja tiheys muotoa $\rho_0 + \rho$, $p_0 + p$, missä p, ρ kuvaavat pieniä vaihteluita vakioiden (ρ_0, p_0) ympäristössä. Johda paineaaalloille yhtälö muotoa
$$p_{tt} = c^2 p_{xx},$$
joka kuvaa ääniaaltojen etenemistä.